

## KLASA ŚCISŁYCH, DWUWYMIAROWYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ STOKESA W NIESKONCZONEJ WARSTWIE PŁASKIEJ

STANISŁAW T O K A R Z E W S K I (WARSZAWA)

Dwuwymiarowe równania Stokesa zostały rozwiązane ściśle w obszarze nieskończonej warstwy płaskiej w przypadku, gdy warunki brzegowe sformułowane na powierzchniach warstwy, są wyrażone za pomocą funkcji dostatecznie gładkich. Wyniki uzyskano w postaci sum nieskończonych szeregów funkcyjnych.

### 1. WPROWADZENIE

Jednym z podstawowych równań mechaniki płynów są liniowe równania Stokesa. Równania te stosuje się powszechnie do opisu przepływów powolnych charakteryzujących się małymi liczbami Reynoldsa. Przepływy takie na dużą skalę realizują się zarówno w przyrodzie, jak również i w technice. Mamy z nimi do czynienia między innymi w procesach smarowania, sedymentacji, flotacji, oczyszczania i wielu innych. Poszukiwanie klas ścisłych równań Stokesa uzasadnione jest więc nie tylko potrzebami teorii przepływów powolnych, lecz również i praktyki.

Niniejsza praca proponuje iteracyjną metodę ścisłego rozwiązania dwuwymiarowych równań Stokesa. Otrzymana metodą tą klasa ścisłych rozwiązań spełnia z góry założone analityczne warunki brzegowe sformułowane na powierzchniach nieskończonej warstwy płaskiej. Od postawionych warunków brzegowych wymaga się dodatkowo, aby spełniały wyprowadzone w pracy odpowiednie kryteria zbieżności rozwiązań. Ostateczne wyniki uzyskuje się w postaci nieskończonych szeregów funkcyjnych, których poszczególne wyrazy są iloczynami niezależnymi od warunków brzegowych wielomianów mnożonych przez kolejne pochodne funkcji określonych na powierzchniach warstwy płaskiej. Należy podkreślić, że otrzymane w tej pracy wyniki różnią się istotnie od klasycznych, zamkniętych rozwiązań równań Stokesa (por. [1, 2 i 3]) otrzymanych w postaci całek Fouriera.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech będzie dany układ dwuwymiarowych równań Stokesa

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

określony w obszarze nieskończonej warstwy płaskiej

$$(2.2) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty \leq z \leq \infty.$$

Na powierzchniach warstwy płaskiej (2.2) określmy następujące nieskończenie wiele razy różniczkowalne funkcje:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u(0, z) &= V_{00}(z), & w(0, z) &= V_{01}(z), \\ u(1, z) &= V_{10}(z), & w(1, z) &= V_{11}(z). \end{aligned}$$

Funkcje  $u$ ,  $w$ ,  $p$  występujące w (2.1)–(2.3) nazywać będziemy odpowiednio prędkością poprzeczną, prędkością wzdłużną oraz ciśnieniem. Układ zależności (2.1)–(2.3) stosuje się w mechanice płynów do opisu przepływów powolnych realizujących się w nieskończenie długich, płaskich kanałach o ruchomych, przepuszczalnych ściankach [4]. Celem pracy jest znalezienie klasy funkcji  $\{u, w, p\}$  ściśle spełniającej w obszarze nieskończonej warstwy płaskiej (2.2) zarówno równania Stokesa (2.1), jak również warunki brzegowe (2.3).

## 3. KLASA ŚCISŁYCH ROZWIĄZAŃ

Zagadnienia brzegowe określone równaniami (2.1) i warunkami brzegowymi rozwiązano metodą kolejnych iteracji (por. dodatek A). Końcowe wyniki uzyskano w postaci następujących szeregów funkcyjnych, określających prędkość poprzeczną

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u(x, z) &= \sum_{s=0}^{\infty} u_{2s}(x, z) + u_{2s+1}(x, z), \\ u_{2s}(x, z) &= U_{2s}(x) V_{10}^{(2s)}(z) + U_{2s}(1-x) V_{00}^{(2s)}(z), \\ u_{2s+1}(x, z) &= U_{2s+1}(x) V_{11}^{(2s+1)}(z) - U_{2s+1}(1-x) V_{01}^{(2s+1)}(z); \end{aligned}$$

prędkość wzdłużną

$$w(x, z) = \sum_{s=0}^{\infty} w_{2s-1}(x, z) + w_{2s}(x, z),$$

$$(3.2) \quad w_{2s-1}(x, z) = W_{2s-1}(x) V_{10}^{(2s-1)}(z) - W_{2s-1}(1-x) V_{00}^{(2s-1)}(z),$$

$$w_{2s}(x, z) = W_{2s}(x) V_{11}^{(2s)}(z) + W_{2s}(1-x) V_{01}^{(2s)}(z)$$

oraz ciśnienie

$$p(x, z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_{2s-2}(x, z) + p_{2s-1}(x, z),$$

$$(3.3) \quad p_{2s-2}(x, z) = P_{2s-2}(x) V_{10}^{(2s-2)}(z) - P_{2s-2}(1-x) V_{00}^{(2s-2)}(z),$$

$$p_{2s-1}(x, z) = P_{2s-1}(x) V_{11}^{(2s-1)}(z) + P_{2s-1}(1-x) V_{01}^{(2s-1)}(z),$$

gdzie

$$U_{2s+j}(x) = - \sum_{n=0}^s (-1)^n (n+1) \left[ \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \alpha_{s-n}^j + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \beta_{s-n}^j \right],$$

$$(3.4) \quad W_{2s+j-1}(x) = \sum_{n=0}^s (-1)^n (n+1) \left[ \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \alpha_{s-n}^j + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \beta_{s-n}^j \right],$$

$$P_{2s+j-2}(x) = \alpha_s^j + \sum_{n=0}^{s-1} (-1)^n \left[ \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \alpha_{s-n-1}^j + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \beta_{s-n-1}^j \right],$$

są wielomianami o współczynnikach wyznaczanych za pomocą następujących formuł iteracyjnych:

$$(3.5) \quad \alpha_s^j = -6 \sum_{n=1}^s (-1)^n (n+1) \cdot 2n \cdot \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{(2n+3)!} \alpha_{s-n}^j + \frac{1}{(2n+2)!} \beta_{s-n}^j \right\},$$

$$\beta_s^j = 2 \sum_{n=1}^s (-1)^n (n+1) \cdot 2n \cdot \left\{ \frac{1}{(2n+3)!} \alpha_{s-n}^j + \frac{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{(2n+2)!} \beta_{s-n}^j \right\},$$

do których jako wartości początkowe należy wprowadzić następujące liczby:

$$(3.6) \quad \alpha_0^0 = 12; \quad \beta_0^0 = -6, \quad \alpha_0^1 = 6, \quad \beta_0^1 = -2.$$

Zakres stosowalności szeregów funkcjonalnych (3.1)–(3.6) określają następujące nierówności (por. dodatek A):

$$(3.7) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{\gamma_{s+1}^j}{\gamma_s^j} \cdot \frac{V_{mj}^{(2s+2)}}{V_{mj}^{(2s)}} \right| < 1, \quad \gamma = (\alpha, \beta), \quad m = (0, 1), \quad j = (0, 1),$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4s^2} \cdot \frac{V_{mj}^{(2s+1)}}{V_{mj}^{(2s)}} \right| < 1,$$

gdzie za pomocą  $\gamma^j$  oznaczyliśmy jednocześnie współczynniki  $\alpha^j, \beta^j$ . Użyte we wzorach (3.1)–(3.7) symbole  $V_{mj}^{(l)}$  oraz  $\sum_{n=0}^{s-1}$  oznaczają odpowiednio

$$(3.8) \quad V_{mj}^{(l)}(z) = \begin{cases} \frac{\partial^l}{\partial z^l} V_{mj}(z), & l > 0, \\ V_{mj}(z), & l = 0, \\ \int^z dz \int^z dz \dots \int V_{mj}(z) dz, & l < 0, \end{cases}$$

oraz

$$(3.9) \quad \sum_{n=0}^{s-1} = \begin{cases} 0, & s = 0, \\ \sum_{n=0}^{s-1}, & s \geq 1. \end{cases}$$

Klasa funkcji  $\{u, w, p\}$  określona za pomocą wzorów (3.1)–(3.9) ściśle spełnia, w obszarze nieskończonej warstwy płaskiej (2.2) zarówno dwuwymiarowe równania Stokesa (2.1), jak również z góry założone warunki brzegowe (2.3).

#### 4. DYSKUSJA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Nie tracąc nic z ogólności rozważań, wygodnie jest dyskusję uzyskanych wyników przeprowadzić na przykładzie prostych warunków brzegowych

$$(4.1) \quad V_{00}(z) = 0, \quad V_{01}(z) = 0, \quad V_{10}(z) = 0, \quad V_{11}(z) = V(z).$$

Ścisłe rozwiązania równań Stokesa przyjmą, po podstawieniu (4.1) do (3.1)–(3.3), postać następujących nieskończonych szeregów funkcyjnych

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u(x, z) &= \sum_{s=0}^{\infty} U_{2s+1}(x) V^{(2s+1)}(z), \\ w(x, z) &= \sum_{s=0}^{\infty} W_{2s}(x) V^{(2s)}(z) + 6Cx(x-1), \\ p(x, z) &= \sum_{s=0}^{\infty} P_{2s-1}(x) V^{(2s-1)}(z) + 12Cz + D \end{aligned}$$

określonych, jak widać z dokładnością do przepływu Poiseuille'a, gdzie  $C$  i  $D$  są dowolnymi stałymi. Należy zauważyć, że każdy wyraz szeregu (4.2) jest iloczynem niezależnych od warunków brzegowych, ściśle określonych wielomianów [por. (3.4)–(3.6)] mnożonych przez odpowiednie pochodne prędkości  $V(z)$  określonej na powierzchni warstwy. Kilka pierwszych wielomianów (3.4) wyznaczonych na podstawie (3.5) i (3.6) zamieszcza tablica 1. Zakres stosowalności szeregów (4.2) określają wynikające z (3.7) nierówności następujące:

$$(4.3) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{\gamma_{s+1}}{\gamma_s} \frac{V^{(2s+2)}(z)}{V^{(2s)}(z)} \right| < 1, \quad \gamma = (\alpha^1, \beta^1),$$

$$(4.3) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4s^2} \frac{V^{(2s+2)}(z)}{V^{(2s)}(z)} \right| < 1.$$

[cd.]

Tablica 1. Wielomiany występujące w szeregach (3.1)

$U_0 = -2x^3 + 3x^2$	$U_1 = -x^3 + x^2$
$U_2 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{10}x^2$	$U_3 = -\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{30}x^2$
$W_{-1} = 6x^2 - 6x$	$W_0 = 3x^2 - 2x$
$W_1 = -x^4 + 2x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$	$W_2 = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$
$P_{-2} = 12$	$P_{-1} = 6$
$P_0 = -6x^2 + 6x - \frac{12}{5}$	$P_1 = -3x^2 + 2x - \frac{1}{5}$

Tablica 2. Wartości współczynników  $\alpha_s^j$  i  $\beta_s^j$

$s$	$\alpha_s^0$	$\beta_s^0$	$\alpha_s^1$	$\beta_s^1$
0	$0,120 \times 10^2$	$-0,600 \times 10$	$0,600 \times 10$	$-0,200 \times 10$
1	$-0,240 \times 10$	0,200	-0,200	$-0,666 \times 10^{-1}$
2	-0,134	$0,338 \times 10^{-1}$	$-0,338 \times 10^{-1}$	$0,302 \times 10^{-2}$
3	$0,508 \times 10^{-3}$	$0,125 \times 10^{-2}$	$-0,125 \times 10^{-2}$	$0,322 \times 10^{-3}$
4	$0,342 \times 10^{-3}$	$-0,971 \times 10^{-5}$	$0,971 \times 10^{-5}$	$0,102 \times 10^{-4}$
5	$0,163 \times 10^{-4}$	$-0,303 \times 10^{-5}$	$0,303 \times 10^{-5}$	$-0,129 \times 10^{-6}$
$\infty$	0	0	0	0

Z przeprowadzonych oszacowań wynika (por. dodatek B), że dokładne wartości granic stosunków  $\gamma_{s+1}^j / \gamma_s^j$  leżą w przedziale

$$(4.4) \quad 0 \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{\gamma_{s+1}^j}{\gamma_s^j} \right| < 1, \quad \gamma = (\alpha^j, \beta^j), \quad j = (0, 1).$$

Na podstawie (4.3) i (4.4) dostajemy więc, że funkcje określone na brzegu warstwy spełniają nierówność

$$(4.5) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{V^{(2s+2)}(z)}{V^{(2s)}(z)} \right| \leq 1$$

gwarantują zbieżność szeregów (4.2). A więc otrzymana klasa rozwiązań (4.2) napewno nie jest klasą pustą. Na przykład takie warunki brzegowe jak  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ;  $\sum_{i=0}^N a_i z^i$  można wprowadzać do postaci (4.2) w celu uzyskania ścisłych rozwiązań równań Stokesa (2.1). Należy zauważyć, że dokładne wyznaczenie zakresu stosowalności otrzymanych szeregów funkcyjnych (4.2) jest, ze względu na skomplikowane formuły (3.5)–(3.6) i (4.3), bardzo trudne. Wartości kilku pierwszych współczynników  $\alpha_s^j, \beta_s^j$  zamieszcza tablica 2.

## 2. PORÓWNANIE OTRZYMANÝCH WYNIKÓW

Porównanie otrzymanych wyników wygodnie jest prowadzić, nie tracąc nic z ogólności rozwiązań, na przykładzie tylko jednej prędkości wzdłużnej  $w(x, z)$ . W powszechnie stosowanym podejściu klasycznym ściśle, zamknięte rozwiązanie równań Stokesa (2.1) uzyskuje się w postaci następującej sumy całek Fouriera:

$$(5.1) \quad w(x, z) = \int_0^{\infty} [C_1^s(\lambda) e^{\lambda x} + C_2^s(\lambda) e^{-\lambda x} + C_3^s(\lambda) x e^{\lambda x} + \\ + C_4^s(\lambda) x e^{-\lambda x}] \sin \lambda z d\lambda + \int_0^{\infty} [C_1^c(\lambda) e^{\lambda x} + C_2^c(\lambda) e^{-\lambda x} + \\ + C_3^c(\lambda) x e^{\lambda x} + C_4^c(\lambda) x e^{-\lambda x}] \cos \lambda z d\lambda.$$

W przeciwieństwie do wzoru (5.1) otrzymana w tej pracy klasa ścisłych rozwiązań równań (2.1) ma postać nieskończonego szeregu funkcyjnego następującego:

$$(5.2) \quad w(x, z) = \sum_{s=0}^{\infty} W_{2s}(x) V^{(2s)}(z).$$

Formuły (5.1) oraz (5.2), jeśli są zbieżne, dążą oczywiście do tej samej granicy będącej ścisłym rozwiązaniem równań Stokesa (2.1). Istotna różnica między nimi tkwi w sposobie wprowadzania do rozwiązań (5.1) oraz (5.2) warunków brzegowych określanych na powierzchniach warstwy płaskiej. We wzorze (5.1) trzeba dokonać na warunkach brzegowych transformacji Fouriera po to, aby wyznaczyć nieznanne funkcje  $C_j^s(\lambda)$  i  $C_j^c(\lambda)$ . Do wzoru (5.2) zaś należy wprowadzić kolejno liczone, parzyste pochodne funkcji prędkości, określonej na brzegu nieskończonej warstwy płaskiej. A zatem w zależności od potrzeb można, spośród formuł (5.1) i (5.2), wybrać tę formułę, dla której łatwiej jest na danych warunkach brzegowych wykonać bądź operację transformacji Fouriera, bądź operację różniczkowania.

## 6. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA UZYSKANYCH ROZWIĄZAŃ

Na podstawie otrzymanych w tej pracy wyników określonych formułami (3.1) dostajemy natychmiast, że każdy z następujących wielomianów

$$(6.1) \quad u_n^I(x, z) = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} U_{2s}(x) (z^n)^{(2s)}, \\ u_n^{II}(x, z) = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} U_{2s+1}(x) (z^n)^{(2s+1)},$$

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad w_n^I(x, z) &= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} W_{2s-1}(x) (z^n)^{(2s-1)}, \\
 [od] \quad w_n^{II}(x, z) &= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} W_{2s}(x) (z^n)^{(2s)}, \\
 p_n^I(x, z) &= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} P_{2s-2}(x) (z^n)^{(2s-2)}, \\
 p_n^{II}(x, z) &= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} P_{2s-1}(x) (z^n)^{(2s-1)},
 \end{aligned}$$

po pierwsze, ściśle rozwiązuje równania Stokesa (2.1) oraz, po drugie, przyjmuje na powierzchniach warstwy płaskiej następujące wartości

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad u_n^I(0, z) &= 0, \quad w_n^I(0, z) = 0, \quad u_n^I(1, z) = \frac{z^n}{n!}, \quad w_n^I(1, z) = 0, \\
 u_n^{II}(0, z) &= 0, \quad w_n^{II}(0, z) = 0, \quad u_n^{II}(1, z) = 0, \quad w_n^{II}(1, z) = \frac{z^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Wielomiany (6.1) noszą nazwę wielomianów podstawowych. Wykorzystywane są one do konstrukcji następujących nieskończonych szeregów funkcyjnych, których sumy

$$\begin{aligned}
 (6.3) \quad u(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{V_{10}^{(n)}(z_0) u_n^I(x, z-z_0) + V_{11}^{(n)}(z_0) u_n^{II}(x, z-z_0)\}, \\
 w(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{V_{10}^{(n)}(z_0) w_n^I(x, z-z_0) + V_{11}^{(n)}(z_0) w_n^{II}(x, z-z_0)\}, \\
 p(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{V_{10}^{(n)}(z_0) p_n^I(x, z-z_0) + V_{11}^{(n)}(z_0) p_n^{II}(x, z-z_0)\},
 \end{aligned}$$

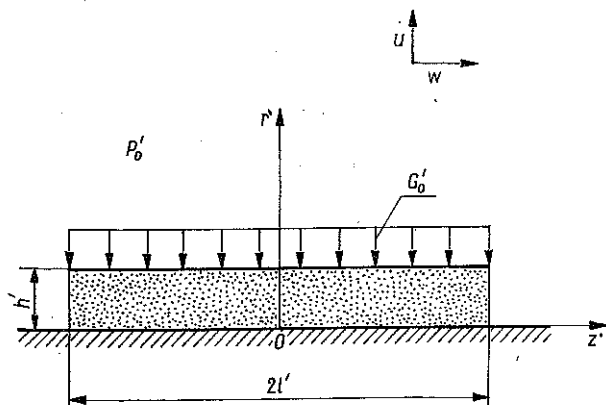
jeśli istnieją, ściśle rozwiązują równania Stokesa (2.1) oraz przyjmują na brzegach warstwy płaskiej z góry ustalone wartości

$$(6.4) \quad u(0, z) = 0, \quad w(0, z) = 0, \quad u(1, z) = V_{10}(z), \quad w(1, z) = V_{11}(z).$$

Szeregi (6.3) i (6.4) są więc klasą ścisłych rozwiązań równań Stokesa (2.1) równoważną, dzięki wzorom (6.1), klasie ścisłych rozwiązań (3.1)–(3.9). Istotna różnica między wzorami (6.3) i (6.4) a (3.1)–(3.9) tkwi w sumach cząstkowych. O ile bowiem suma cząstkowa szeregów (6.3) i (6.4) spełnia równania Stokesa oraz nie spełnia warunków brzegowych, o tyle każda suma cząstkowa szeregów (3.1)–(3.9) odwrotnie, spełnia warunki brzegowe, nie spełnia natomiast równań Stokesa.

## 7. PRZYKŁAD ZAGADNIENIA FIZYCZNEGO

Niech z wąskiej szczeliny o grubości  $h'$  i szerokości  $2l'$  wyciskana będzie za pomocą sztywnej płaszczyzny nieściśliwa ciecz lepka siłą o natężeniu  $G'_0$  (rys. 1). Niech na zewnątrz szczeliny panuje stałe, nie zmieniające się w czasie



Rys. 1

ciśnienie  $P'_0$ . Wprowadźmy następujące założenia:

a) liczba Reynoldsa jest mała

$$(7.1) \quad \text{Re} = \frac{h' U'_0}{\nu} \ll 1;$$

b) stosunek grubości szczeliny do jej szerokości jest mały

$$(7.2) \quad \frac{h'}{l'} \ll 1,$$

gdzie przez  $U'_0$  oznaczyliśmy prędkość poruszania się górnej płaszczyzny (rys. 1). Na mocy założeń (7.1)–(7.2) realizujący się w szczelinie przepływ jest przepływem powolnym i do jego opisu można zastosować równania Stokesa. Poszukiwać będziemy równania ruchu górnej, sztywnej płaszczyzny wyciskającej ciecz ze szczeliny. Na wstępie wprowadźmy następujące zmienne bezwymiarowe:

$$(7.3) \quad x = \frac{x'}{h'}, \quad z = \frac{z'}{h'}, \quad l = \frac{l'}{h'}, \quad u = \frac{u'}{V'}, \quad w = \frac{w'}{V'}, \quad p = \frac{p' h'}{\mu V'},$$

$$U_0 = \frac{U'_0}{V'}, \quad P_0 = \frac{P'_0 h'}{\mu V'}, \quad G_0 = \frac{G'_0 h'}{\mu V'},$$



gdzie  $V'$  oznacza dowolną prędkość odniesienia. Zmienne (7.3) pozwalają bezpośrednio wykorzystać wyniki uzyskane w niniejszej pracy. W tym celu należy jako warunki brzegowe przyjąć

$$(7.4) \quad V_{00} = 0, \quad V_{01} = 0, \quad V_{10} = U_0, \quad V_{11} = 0.$$

Po wprowadzeniu (7.4) do (3.1) zależności

$$(7.5) \quad \begin{aligned} u &= (-2x^3 + 3x^2) U_0, \\ w &= (6x^2 - 6x)(U_0 z + C), \\ p &= 6U_0 z^2 + Cz + (6x - 6x^2) U_0 + D \end{aligned}$$

opisujące przepływ powstający w szczelinie. Stałe  $U_0$ ,  $C$  i  $D$  wyznacza się z następujących warunków brzegowych:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \int_0^l \left( -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz &= -G_0 l - P_0 l, \\ \int_0^1 p(x, l) dx &= P_0, \quad w(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (7.6) zapewniają następujące zjawiska fizyczne: 1) reakcja cieczy na płaszczyznę równa się sile zewnętrznej naciskającej tę płaszczyznę, 2) średnie ciśnienie w końcowym przekroju szczeliny  $z = l$  równe jest ciśnieniu zewnętrznemu oraz 3) prędkość wzdłużna znika w przekroju  $z = 0$ . Rozwiązując równania (7.6), a następnie korzystając z założenia (7.2), otrzymujemy

$$U_0 = -\frac{G_0}{4l^2}, \quad D = \frac{3}{2} G_0 + P_0, \quad C = 0.$$

Stąd dostajemy zależność

$$(7.7) \quad U'_0 = \frac{dh'}{dt} = -\frac{G'_0 h'^3}{4\mu l'^2}$$

określającą prędkość poruszania się sztywnej płaszczyzny naciskającej na ciecz. Całkując (7.7) z warunkiem początkowym  $h'(0) = h'_0$ , otrzymujemy

$$(7.8) \quad h'(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{G'_0 t}{2\mu l'^2} + \frac{1}{h_0'^2}}}$$

Wzór (7.8) określa drogę, jaką przebywa w czasie, (pod wpływem stałego obciążenia zewnętrznego), górna sztywna powierzchnia wyciskająca ciecz ze szczeliny.

## 8. UWAGI KOŃCOWE

Klasa ścisłych dwuwymiarowych rozwiązań Stokesa określona za pomocą wzorów (3.1)–(3.9) ma z punktu widzenia praktycznych zastosowań kilka istotnych zalet. Po pierwsze, klasa funkcji (3.1)–(3.9) wyrażona jest za pomocą zamkniętego algorytmu obliczeniowego wygodnego do prowadzenia obliczeń numerycznych. Po drugie wprowadzanie warunków brzegowych do ścisłych rozwiązań równań Stokesa (3.1)–(3.9) polega na obliczaniu kolejnych pochodnych funkcji określonych na powierzchni warstwy płaskiej, co jest w wielu przypadkach operacją stosunkowo prostą. Istotną zaś wadą otrzymanych wyników (3.1)–(3.9) jest brak dokładnych informacji o zakresie stosowności klasy rozwiązań (3.1)–(3.9).

## DODATEK 1. METODA ROZWIĄZANIA

Dwuwymiarowe równania Stokesa (2.1) rozwiążemy ściśle w przypadku następujących prostych warunków brzegowych:

$$(A.1) \quad u(1, z) = 0, \quad w(1, z) = V(z), \quad u(0, z) = 0, \quad w(0, z) = 0.$$

Wykorzystując dwa ostatnie warunki brzegowe (A.1) dostajemy, po wykonaniu prostych przekształceń, następujący rozdzielony układ równań równoważny wyjściowym równaniom Stokesa (2.1)

$$(A.2) \quad \begin{aligned} u &= - \int_0^x dx \frac{\partial}{\partial z} w, \\ p &= - \frac{\partial}{\partial z} w - \int_0^{x^2} d^2 x \frac{\partial^3}{\partial z^3} w + \int_0^z \varphi(z) dz, \\ w &= - \left( 2 \int_0^{x^2} d^2 x \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \int_0^{x^4} d^4 x \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) w + \frac{1}{2} x^2 \varphi(z) + x\psi(z), \end{aligned}$$

gdzie  $\varphi(z)$  oraz  $\psi(z)$  są dowolnymi funkcjami jednej zmiennej  $z$  oraz gdzie

$$\int_0^{x^n} d^n x = \int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x dx$$

oznacza operację  $n$ -krotnego całkowania. Ścisłe rozwiązanie równania (A.2) uzyskane metodą kolejnych iteracji przyjmuje postać

$$(A.3) \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ - \left( 2 \int_0^{x_2} d^2 x \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \int_0^{x_4} d^4 x \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \right]^n \left( \frac{1}{2} x^2 \varphi(z) + x \psi(z) \right).$$

Przedstawmy dowolne funkcje  $\varphi(z)$  oraz  $\psi(z)$  za pomocą sum następujących nieskończonych szeregów o stałych współczynnikach

$$(A.4) \quad \varphi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s V^{(2s)}(z), \quad \psi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s V^{(2s)}(z).$$

Z kryterium d'Alemberta wynika, że szeregi (A.4) są zbieżne, gdy spełnione są następujące nierówności:

$$(A.5) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{\gamma_{s+1}}{\gamma_s} \frac{V^{(2s+2)}(z)}{V^{(2s)}(z)} \right| < 1, \quad \gamma = (\alpha, \beta).$$

Wprowadzając (A.4) do (A.3), po wykonaniu operacji podnoszenia do potęgi i sumowania otrzymujemy

$$(A.6) \quad w = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \int_0^{x_{2n}} d^{2n} x \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}} \right] \left[ \frac{1}{2} x^2 \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s + x \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \right] V^{(2s)}(z),$$

gdzie  $V_{(z)}^{(2s)}$  oznacza kolejną  $2s$ -tą pochodną funkcji prędkości  $V(z)$ . Nierówność

$$(A.7) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{4s^2} \frac{V^{(2s+2)}(z)}{V^{(2s)}(z)} \right| < 1$$

otrzymana na podstawie kryterium d'Alemberta jest warunkiem dostatecznym zbieżność szeregu (A.6) w obszarze warstwy płaskiej (2.2). Wykonując w (A.6) operacje wskazane przez operator liniowy i porządkując wyrazy względem pochodnych  $V_{(z)}^{(2s)}$ , dostajemy szereg funkcyjny następujący

$$(A.8) \quad w = \sum_{s=0}^{\infty} W_{2s}(x) V^{(2s)}(z),$$

$$W_{2s}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left[ \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \alpha_{s-n} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \beta_{s-n} \right].$$

Nierówności (A.5) i (A.7) zapewniają szeregowi (A.8) zbieżność w obszarze warstwy płaskiej (2.2). Nieznane współczynniki  $\alpha_s$  i  $\beta_s$  występujące w wielomianach  $W_{2s}(x)$  wyznaczmy na podstawie dwóch pierwszych warunków brzegowych (A.1). Po przeprowadzeniu obliczeń dostajemy następujące for-

muły rekurencyjne:

$$(A.9) \quad \begin{aligned} \alpha_s &= -6 \sum_{n=1}^s (-1)^n (n+1) \left\{ \frac{2n+1}{(2n+3)!} \alpha_{s-n} + \frac{2n}{2n+2} \beta_{s-n} \right\}, \\ \beta_s &= 2 \sum_{n=1}^s (-1)^n (n+1) \left\{ \frac{2n}{(2n+3)!} \alpha_{s-n} + \frac{(2n-1)}{(2n+2)!} \beta_{s-n} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(A.10) \quad \alpha_0 = 6, \quad \beta_0 = -2.$$

Funkcje prędkości  $u$  oraz funkcję ciśnienia  $p$  otrzymamy wprowadzając funkcję (A.8) do wzorów (A.2) i (1.2). Nietrudno zauważyć, że ze względu na liniowość równań Stokesa rozwiązania dane związkami (3.1)–(3.9) uzyskuje się bez żadnych trudności metodą przedstawioną w tym dodatku. Nietrudno też zauważyć, że nierówności (3.7) określające zakres stosowalności uzyskanych wyników wynikają bezpośrednio ze związków (A.5) oraz (A.7).

#### DODATEK B. OSZACOWANIA

Ciąg współczynników  $\alpha_s^j$  i  $\beta_s^j$  wyznaczany na podstawie wzorów (3.5) i (3.6) wygodnie jest ograniczyć od góry ciągiem liczb  $\underline{\alpha}_s^j$  i  $\underline{\beta}_s^j$ , liczonym na podstawie następującej formuły rekurencyjnej:

$$(B.1) \quad \begin{aligned} \underline{\alpha}_s^j &= 6 \sum_{n=1}^s (n+1) \left\{ \frac{(2n+1)}{(2n+3)!} \underline{\alpha}_{s-n}^j + \frac{2n}{(2n+2)!} \underline{\beta}_{s-n}^j \right\}, \\ \underline{\beta}_s^j &= 2 \sum_{n=1}^s (n+1) \left\{ \frac{2n}{(2n+3)!} \underline{\alpha}_{s-n}^j + \frac{2n-1}{(2n+2)!} \underline{\beta}_{s-n}^j \right\}. \end{aligned}$$

Łatwo wykazać, że spełnione są następujące nierówności:

$$(B.2) \quad \begin{aligned} 6 \sum_{n=1}^s (n+1) \frac{2n+1}{(2n+3)!} &\leq 6 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{2n+1}{(2n+3)!} < 0,4, \\ 6 \sum_{n=1}^s (n+1) \frac{2n}{(2n+2)!} &\leq 6 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{2n}{(2n+2)!} < 1,2, \\ 2 \sum_{n=1}^s (n+1) \frac{2n}{(2n+3)!} &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{2n}{(2n+3)!} < 0,1, \\ 2 \sum_{n=1}^s (n+1) \frac{2n-1}{(2n+2)!} &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{2n-1}{(2n+2)!} < 0,3. \end{aligned}$$

Z (B.2) i (B.1) wynika, że

$$(B.3) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_s^j = 0, \quad \gamma = (\alpha, \beta),$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{\gamma_{s+1}^j}{\gamma_s^j} \right| < 1.$$

Nierówności (4.4) zostały uzyskane na podstawie związków (B.3).

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. HAPPEL, H. BRENNER, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 1965.
2. H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1932.
3. W. E. LANGLOIS, *Slow viscous flow*, The Macmillan Company, New York 1964.
4. A. SZANIAWSKI, A. ZACHARA, *Przepływ laminarny w kanale o zmiennym przekroju z ruchomymi i porowatymi ściankami*, *Mech. Teor. Stos.*, 16, 3, 1978.

#### РЕЗЮМЕ

#### КЛАСС ТОЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СТОКСА В БЕСКО- НЕЧНОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ

Найдено точное решение двумерных уравнений Стокса для случая бесконечного плоского слоя, когда граничные условия, на плоскостях ограничивающих слой, выражены через функции достаточно гладкие. Решения получены в виде сумм бесконечных функциональных рядов.

#### SUMMARY

#### CLASS OF ACCURATE TWO-DIMENSIONAL SOLUTION OF THE STOKES EQUATIONS FOR AN INFINITE PLANE LAYER

Accurate solutions of two-dimensional Stokes equations are derived for an infinite planelayer in the case when the boundary conditions formulated at the surfaces of the layer are expressed in terms of sufficiently smooth functions. The results have the form of infinite functional series.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 lutego 1984 r.