

IDENTYFIKACJA WSPÓLCZYNNIKÓW RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO OPISUJĄCEGO PROSTOLINIOWY NIEUSTALONY RUCH POJAZDU PODWODNEGO

ANTONI WILIŃSKI i MAREK ZELLMAN (GDYNIA)

Wyznacza się współczynnik masy towarzyszącej λ_{11} oraz współczynnik oporu całkowitego w ruchu prostoliniowym wzdłużnym dla pojazdu podwodnego. Obliczenia wykonano na podstawie wyników holowań rzeczywistych obiektu w basenie modelowym, przy czym rozmiary basenu nie pozwalały na uzyskiwanie przez pojazd prędkości ustalonych.

1. OPIS METODY IDENTYFIKACJI WSPÓLCZYNNIKÓW

W artykule przedstawia się metodę przybliżonego obliczania współczynników równania różniczkowego opisującego ruch nieustalony pojazdu podwodnego w zanurzeniu. Znalezienie tych współczynników pozwala m.in. na ustalenie wielkości masy towarzyszącej w ruchu postępowym wzdłużnym, a także określenie zmian współczynnika oporu całkowitego. W tradycyjnych metodach badania oporu jednostek pływających, wykonuje się holowania ich modeli w basenach modelowych z prędkościami ustalonymi. Wymaga to wykonania znacznej ilości holowań z różnymi prędkościami, a długość basenu musi zapewniać możliwość uzyskania prędkości ustalonych. Opisany tu ruch nieustalony może być natomiast realizowany w basenie o wielokrotnie mniejszej długości.

Przedmiotem badań był podwodny obiekt elipsoidalny o ciężarze w powietrzu ok. 7 kN oraz długości $L = 3,8$ m i szerokości $B = 0,9$ m. Po zanurzeniu był w znacznej części napełniony wodą, co powodowało, że jego masa (wraz z wodą wewnątrz pojazdu) była oceniana na 2243 kg. Pojazd holowano kilkakrotnie ze stałą siłą wymuszającą ruch, uzyskiwaną przez grawitacyjne opadanie odpowiedniego ciężarka holującego. Holowanie odbywało się tuż pod powierzchnią wody, dzięki czemu uzyskiwano ruch prawie dokładnie prostoliniowy, lecz współczynniki hydrodynamiczne obciążone były wpływem powierzchni swobodnej.

Wymiary basenu pozwalały jedynie na kilkumetrowe ruchy pojazdu, w czasie których rejestrowano jego zmianę położenia (wyniki będą przedstawione w dalszej części opracowania).

Prostoliniowy nieustalony ruch obiektu zanurzonego można opisać równaniem

$$(1.1) \quad (m + \lambda_{11}) \ddot{x} = T - R,$$

gdzie m oznacza masę obiektu (w danym przypadku masa pojazdu wraz z wypełniającą go wodą), λ_{11} pozorną masę towarzyszącą w ruchu wzdłużnym, T siłę wymuszającą ruch oraz R opór pojazdu. Przez $x(t)$ będzie oznaczana zmiana położenia wybranego charakterystycznego punktu pojazdu w czasie, przez $\dot{x}(t)$ —jego prędkość, a $\ddot{x}(t)$ —przyspieszenie.

Opór pojazdu daje się przedstawić za pomocą znanego wzoru

$$(1.2) \quad R = C \frac{\rho \dot{x}^2}{2} L^2,$$

gdzie ρ oznacza gęstość wody, C współczynnik oporu czołowego oraz L długość pojazdu.

Współczynnik oporu czołowego jest wielkością określaną najczęściej na podstawie wzorów empirycznych np. [4] i [5], przy czym ustalenie C jest możliwe dopiero po rozbiciu oporu całkowitego na składowe (np. tu opór tarcia, ciśnienia i dodatkowy). Poza tym współczynnik C jest wielkością umowną i dla tego samego obiektu i tych samych warunków opływu może przyjmować różne wartości w zależności od wymiaru charakterystycznego (we wzorze (1.2) tym wymiarem jest długość L). Wiadomo także, że C przy relatywnie małych prędkościach zależy od liczby Reynoldsa, a więc pośrednio od prędkości. Uwzględniając powyższe czynniki kształtujące współczynnik oporu oraz opierając się na jego wykresach [5], w dalszej części pracy zależność między współczynnikiem oporu a prędkością przyjęto w postaci

$$(1.3) \quad C = A_1 \dot{x}^2 + A_2 \dot{x} + A_3.$$

Po uwzględnieniu (1.2) i równania (1.3) równanie (1.1) można przedstawić w postaci

$$(1.4) \quad M \ddot{x} = T - C_1 \dot{x}^2 (A_1 \dot{x}^2 + A_2 \dot{x} + A_3),$$

gdzie

$$M = m + \lambda_{11}, \quad C_1 = \frac{\rho L^2}{2}$$

lub

$$(1.5) \quad M \ddot{x} + B_1 \dot{x}^4 + B_2 \dot{x}^3 + B_3 \dot{x}^2 = T,$$

gdzie

$$B_1 = C_1 A_1, \quad B_2 = C_1 A_2, \quad B_3 = C_1 A_3.$$

Równanie (1.5) opisuje ruch wymuszony pojazdu przy założeniu, że współczynnik oporu ma postać (1.3). Jeżeli znana jest funkcja $x(t)$ oraz jej pochodne $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, to współczynniki równania (1.5) można zidentyfikować,

minimalizując błąd równania (wskaźnik identyfikacji)

$$(1.6) \quad J(M, B_1, B_2, B_3) = \sqrt{\int_{t_0}^{t_k} [M\ddot{x}_* + B_1 \dot{x}_*^4 + B_2 \dot{x}_*^3 + B_3 \dot{x}_*^2 - T]^2 dt}.$$

W funkcjale (1.6) $x_*(t)$ oznacza funkcję wyznaczoną drogą aproksymacji z pomiarów $x_p(t_0), \dots, x_p(t_k)$ położenia obiektu taką, że $W = \{\ddot{x}_*(t), \dot{x}_*^4(t), \dot{x}_*^3(t), \dot{x}_*^2(t)\}$ jest zbiorem elementów liniowo niezależnych. W szczególności $x_*(t)$ może być wielomianem co najmniej drugiego stopnia.

Niech $T(t)$ oraz $x_*(t), \dot{x}_*(t), \ddot{x}_*(t)$ należą do przestrzeni Hilberta $L^2([t_0, t_k], R^1)$, tj. przestrzeni funkcji $u: [t_0, t_k] \rightarrow R^1$ całkowalnych w sensie Lebesgue'a takich, że

$$\int_{t_0}^{t_k} |u(t)|^2 dt < \infty,$$

z iloczynem skalarnym

$$(1.7) \quad (u_1/u_2) = \int_{t_0}^{t_k} u_1(t) u_2(t) dt$$

indukującym normę

$$(1.8) \quad \|u\| = \sqrt{\int_{t_0}^{t_k} |u(t)|^2 dt}.$$

Wówczas można wykazać (por. [2, s. 54]), że

$$U = \{u = M\ddot{x}_* + B_1 \dot{x}_*^4 + B_2 \dot{x}_*^3 + B_3 \dot{x}_*^2\}$$

jest podprzestrzenią domkniętą przestrzeni $L^2([t_0, t_k], R^1)$.

W podprzestrzeni U należy znaleźć taki element

$$(1.9) \quad u_0 = M^0 \ddot{x}_* + B_1^0 \dot{x}_*^4 + B_2^0 \dot{x}_*^3 + B_3^0 \dot{x}_*^2,$$

który byłby położony najbliżej (w sensie normy $\|\cdot\|$) do danego elementu $T(t)$ należącego do przestrzeni $L^2([t_0, t_k], R^1)$. Oznacza to, że należy znaleźć taki układ liczb M^0, B_1^0, B_2^0, B_3^0 , żeby

$$(1.10) \quad \|u_0 - T\| = J(M^0, B_1^0, B_2^0, B_3^0) = \min_{M, B_1, B_2, B_3} \|M\ddot{x}_* + B_1 \dot{x}_*^4 + B_2 \dot{x}_*^3 + B_3 \dot{x}_*^2 - T\|.$$

Z twierdzenia o rzucie ortogonalnym [3]: Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a U —domkniętą podprzestrzenią H . Wówczas każdemu elementowi $x \in H$ odpowiada jeden i tylko jeden element $u_0 \in U$ taki, że $\|x - u_0\| \leq \|x - u\|$ dla wszystkich $u \in U$. Ponadto warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby $u_0 \in U$ był jedynym elementem minimalizującym, jest, aby $(x - u_0)$ był ortogonalny do U , wynika istnienie i jednoznaczność poszukiwanego u_0 oraz prostopadłość różnicy $u_0 - T$ do każdego spośród elementów $\ddot{x}_*, \dot{x}_*^4, \dot{x}_*^3, \dot{x}_*^2$. Zatem współczynniki M^0, B_1^0, B_2^0, B_3^0 , można wyznaczyć z układu równań

$$(1.11) \quad \begin{aligned} (M\ddot{x}_* + B_1 \dot{x}_*^4 + B_2 \dot{x}_*^3 + B_3 \dot{x}_*^2 - T/\dot{x}_*) &= 0, \\ (M\ddot{x}_* + B_1 \dot{x}_*^4 + B_2 \dot{x}_*^3 + B_3 \dot{x}_*^2 - T/\dot{x}_*^4) &= 0, \\ (M\ddot{x}_* + B_1 \dot{x}_*^4 + B_2 \dot{x}_*^3 + B_3 \dot{x}_*^2 - T/\dot{x}_*^3) &= 0, \\ (M\ddot{x}_* + B_1 \dot{x}_*^4 + B_2 \dot{x}_*^3 + B_3 \dot{x}_*^2 - T/\dot{x}_*^2) &= 0. \end{aligned}$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego układ równań (1.11) można przedstawić w postaci

$$(1.12) \quad Mb_{i1} + B_1 b_{i2} + B_2 b_{i3} + B_3 b_{i4} = b_{i0}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$b_{11} = \int_{t_0}^{t_k} \ddot{x}_*(t) \ddot{x}_*(t) dt,$$

$$b_{1j} = \int_{t_0}^{t_k} \ddot{x}_*(t) \dot{x}_*^{6-j}(t) dt, \quad j = 2, 3, 4$$

$$b_{ij} = \int_{t_0}^{t_k} \dot{x}_*^{6-i}(t) \dot{x}_*^{6-j}(t) dt, \quad i, j = 2, 3, 4,$$

$$b_{j1} = \int_{t_0}^{t_k} \ddot{x}_*(t) \dot{x}_*^{6-j}(t) dt, \quad j = 2, 3, 4,$$

$$b_{10} = \int_{t_0}^{t_k} T(t) \ddot{x}_*(t) dt,$$

$$b_{i0} = \int_{t_0}^{t_k} T(t) \dot{x}_*^{6-i}(t) dt, \quad i = 2, 3, 4.$$

Algorytm doboru współczynników równania różniczkowego (1.5) przyjmuje szczególnie dogodną postać dla obliczeń numerycznych w przypadku, gdy wartości $x_p(t_0), \dots, x_p(t_k)$ wyznaczone z pomiarów położenia obiektu oraz wartości $T_p(t_0), \dots, T_p(t_k)$ siły wymuszającej są aproksymowane wielomianami

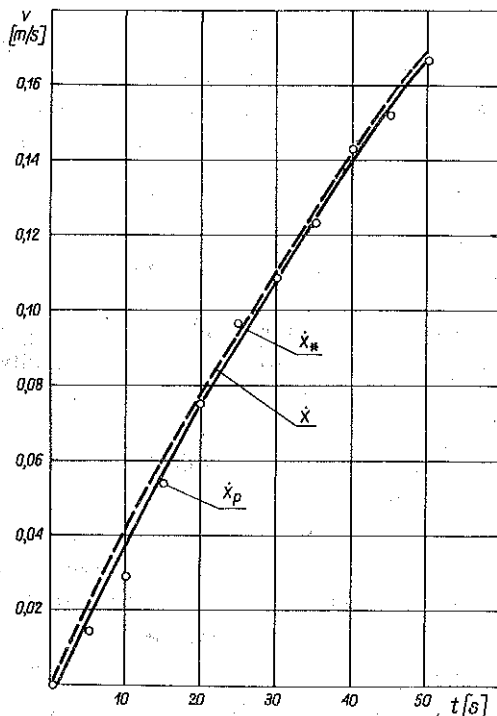
$$(1.13) \quad x_*(t) = \sum_{i=0}^r \alpha_i t^i, \quad T(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i t^i.$$

Pochodne wielomianu aproksymującego wartości położenia obiektu można obliczyć ze wzoru

$$(1.14) \quad x_*^{(j)}(t) = \sum_{i=j}^r \frac{i!}{(i-j)!} \alpha_i t^{i-j}.$$

2. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

Dla określenia współczynników równania (1.5) wykonano pięć holowań pojazdu, zakładając identyczne warunki każdego holowania. Wyniki pomiarów wartości $v_p(t_i)$ prędkości obiektu w chwilach $t_i = 5i$ [s], $i = 0, 1, \dots, 10$ ujęto w tablicy 1 oraz na rys. 1.



Rys. 1. Wykresy prędkości obiektu

Tablica 1. Wyniki pomiarów prędkości obiektu

| i | t_i [s] | v [m/s] | | | | | v_{sr} [m/s] |
|-----|--------------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------------------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 5 | 0,012 | 0,017 | 0,012 | 0,016 | 0,014 | 0,0148 |
| 2 | 10 | 0,026 | 0,023 | 0,026 | 0,036 | 0,030 | 0,0282 |
| 3 | 15 | 0,046 | 0,046 | 0,048 | 0,066 | 0,062 | 0,0536 |
| 4 | 20 | 0,072 | 0,078 | 0,078 | 0,072 | 0,070 | 0,074 |
| 5 | 25 | 0,088 | | 0,100 | 0,098 | 0,094 | 0,095 |
| 6 | 30 | 0,106 | 0,098 | 0,118 | 0,112 | 0,116 | 0,11 |
| 7 | 35 | 0,120 | 0,120 | 0,120 | 0,128 | 0,124 | 0,1224 |
| 8 | 40 | 0,130 | 0,146 | 0,144 | 0,142 | 0,142 | 0,1408 |
| 9 | 45 | 0,150 | 0,152 | 0,150 | 0,154 | 0,156 | 0,1524 |
| 10 | 50 | 0,164 | 0,164 | 0,176 | | 0,172 | 0,169 |

Tablica 2. Wyniki aproksymacji średnich prędkości

| Stopień wielomianu | Współczynniki wielomianu | | | | Błąd aproksymacji |
|--------------------|--------------------------|------------|------------|------------|-------------------|
| | α_0 | α_1 | α_2 | α_3 | |
| 0 | 0,0878 | — | — | — | 0,0549 |
| 1 | 0,00134 | 0,0035 | — | — | 0,0050 |
| 2 | -0,00493 | 0,0043 | -0,000017 | — | 0,0034 |
| 3 | -0,0021 | 0,0034 | 0,00003 | -0,000001 | 0,0028 |

Średnie prędkości $v_{sr}(t_0), \dots, v_{sr}(t_{10})$ aproksymowano wielomianami metodą najmniejszej sumy kwadratów. Współczynniki wielomianów zawiera tablica 2.

Do dalszych obliczeń wybrano wielomian stopnia drugiego o postaci

$$(2.1) \quad x_* = 0,00493 + 0,0043t - 0,000017t^2$$

z pochodną

$$(2.2) \quad \dot{x}_* = 0,0043 - 0,000034t.$$

Wybór ten (2.1) można uzasadnić dążeniem do minimalizacji stopnia wielomianu ze względów obliczeniowych z jednej strony i koniecznością spełnienia narzuconego wcześniej warunku na postać funkcji $x_*(t)$ z drugiej strony.

Wartości $v_{sr}(t_0), \dots, v_{sr}(t_{10})$ średnich prędkości oraz wykres $\dot{x}_*(t)$ przedstawiono na rys. 1.

Holowania wykonywano ze stałą siłą wymuszającą $T = 11,63$ N. Na podstawie znajomości siły wymuszającej $T(t)$ i odpowiadającej jej prędkości $\dot{x}_*(t)$ wyznaczono iloczyny skalarne układu (1.12) metodą Simpsona I z podziałem horyzontu czasowego $t_{10} - t_0 = 50$ s na 10 części.

Uzyskano następujące wartości:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0,0006072, & b_{12} &= 0,0000264, & b_{13} &= 0,0001971, & b_{14} &= 0,0015685, \\ b_{21} &= 0,0000264, & b_{22} &= 0,0000041, & b_{23} &= 0,0000276, & b_{24} &= 0,0001867, \\ b_{31} &= 0,0001971, & b_{32} &= 0,0000276, & b_{33} &= 0,0001867, & b_{34} &= 0,001286, \\ b_{41} &= 0,0015685, & b_{42} &= 0,0001867, & b_{43} &= 0,001286, & b_{44} &= 0,009083, \\ b_{10} &= 2,00615, & b_{20} &= 0,10564, & b_{30} &= 0,77341, & b_{40} &= 5,99223. \end{aligned}$$

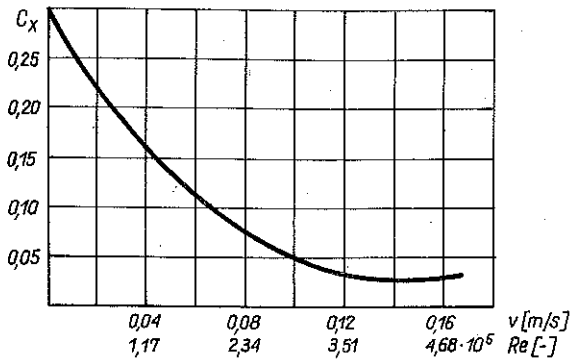
Przy tych iloczynach skalarnych rozwiązanie układu równań (1.12) stanowią następujące wartości współczynników

$$(2.3) \quad M^0 = 2550, \quad B_1^0 = 92418, \quad B_2^0 = 26096, \quad B_3^0 = 2015.$$

Wobec tego zależność między $T(t)$ i $\dot{x}(t)$ uzyskano w postaci równania różniczkowego

$$(2.4) \quad 2550\ddot{x} + 92418\dot{x}^4 - 26096\dot{x}^3 + 2015\dot{x}^2 = T(t).$$

W przypadku, gdy $T(t) = 11,63$ N i $x(0) = 0$ równanie (18) rozwiązano metodą Rungego-Kutty z krokiem całkowania 0,1 s. Wyznaczone rozwiązanie $x(t)$ przedstawiono w postaci wykresu na rys. 1. Maksymalne bezwzględne

Rys. 2. Współczynnik oporu czołowego pojazdu odniesiony do L^2

odchylenie prędkości $x_p(t_i)$ wyznaczonej z pomiarów od prędkości $x(t_i)$ wyznaczonej z modelu ruchu (2.4) wynosi $\max |\dot{x}_p(t_i) - \dot{x}(t_i)| = 0,014$ m/s. Uznając, że równanie (2.4) adekwatnie opisuje ruch pojazdu można przystąpić do analizy zidentyfikowanych współczynników (2.3).

Na podstawie zależności (1.3), (1.4) i (1.5) wyznaczono współczynnik oporu czołowego jako funkcję prędkości, którego wykres przedstawiono na rys. 2 (pod wartościami prędkości zamieszczono odpowiadające im liczby Reynoldsa).

Wykres po przeliczeniu go na współczynnik odniesiony do $V^{\frac{2}{3}}$ nie odbiega od przewidywanych przebiegów $C_x(Re)$ prezentowanych w [4] dla niewielkich liczb Reynoldsa. Wadą przedstawionego wykresu wydaje się być mały zakres zmian prędkości (ze względu na małe wymiary basenu). Mimo to zakres ten jest także ważny. Otóż współczynnik oporu dla małych liczb Reynoldsa może być np. wykorzystany w modelu zachowania się pojazdu w czasie pozycjonowania (utrzymywanie pojazdu w pobliżu wybranego punktu układu inercjalnego), jak również w modelu opisującym lokalne ruch pojazdu związane z wykorzystaniem manipulatora lub kamery TV.

Z kolei współczynnik $M^0 = 2550$ kg równania (2.4) oznacza masę pojazdu wraz z masą wypełniającą go wody oraz pozorną masą towarzyszącą λ_{11} . Dla oszacowania poprawności tego współczynnika obliczono wielkość masy biorącej udział w ruchu według wzoru (wpływ głębokości basenu wynoszącej ok. 2,5 L pominięto)

$$(2.5) \quad M_s = k_{11}^* (1 + k_{11}) V,$$

gdzie k_{11}^* oznacza współczynnik wpływu powierzchni swobodnej; dla danych warunków wg [1] przyjęto $k_{11}^* = 0,96$, k_{11} współczynnik masy towarzyszącej; przyjęto wg [4] $k_{11} = 0,16$, ρ gęstość wody; $\rho = 1000$ kgm³, V objętość pojazdu w zanurzeniu; dla danego obiektu $V = 2243$ m³.

Obliczona masa $M_s = 2489$ kg ze wzoru (2.5) różni się od określonej w modelu ruchu (2.4) $M^0 = 2520$ kg w przybliżeniu o 3%, co można uważać za wynik zadawalający.

Autorzy nie dokonują statystycznej oceny istotności wyników (2.3), gdyż celem artykułu było przedstawienie możliwości ich obliczania w oparciu o wynik holowania w krótkim basenie. Dla określenia przedziałów ufności przedstawionych wyników należałoby wykorzystać rezultaty każdego holowania oddzielnie (tablica 1) wg podanego algorytmu obliczeniowego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. GNIEWSZEW, *Wpływ swobodnej powierzchni wody na towarzyszące masy i momenty bezwładności okrętu podwodnego przy pływaniu w położeniu podwodnym*, WSMW, Gdynia 1982.
2. W. KOŁODZIEJ, *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
3. D. LUENBERGER, *Teoria optymalizacji*, PWN, Warszawa 1974.
4. Е. Н. ПАНТОВ, Н. Н. МАХИН, Б. Б. ШЕРЕМЕТОВ, *Основы теории движения подводных аппаратов*, Судостроение, Ленинград 1973.
5. *Poradnik okrętowca*, t. II. Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1960.

РЕЗЮМЕ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОПИСЫВАЮЩЕГО ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ПОДВОДНОГО АППАРАТА

Определяются коэффициент присоединенной массы λ_{11} и коэффициент полного сопротивления в прямолинейном продольном движении для подводного аппарата. Расчеты проведены на основе результатов буксировки реального объекта в модельном бассейне, причем размеры бассейна не позволяют получить аппаратом установившихся скоростей.

SUMMARY

IDENTIFICATION OF COEFFICIENTS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION DESCRIBING RECTILINEAR UNSTEADY MOTION OF A SUBMARINE VESSEL

Coefficients of the apparent mass λ_{11} and of the total drag are determined for a underwater vehicle moving along a straight line in longitudinal direction. The analysis is performed on the basis of measurements made on a real object tested in a towing tank; its dimensions did not, however, allow for reaching steady-state velocities.

WYŻSZA SZKOŁA MARYNARKI WOJENNEJ im. BOHATERÓW WESTERPLATTE, GDYNIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lipca 1984 r.