

## KINEMATYKA PROCESU WYCISKANIA PROFILI ZŁOŻONYCH

JAN PIWNIK (BIAŁYSTOK)

Praca prezentuje nową propozycję analitycznego opisu kinematyki procesu wyciskania prętów z nieregularnym kształtem przekrojów poprzecznych. Przedstawiono wzory analityczne na trzy składowe prędkości przemieszczeń w obszarze uplastycznienia materiału poddanego wyciskaniu z niesymetrycznego pojemnika do niesymetrycznej matrycy. Forma opisu pól prędkości ułatwia analizę złożonego procesu wyciskania pod kątem obliczeń sił z oceny górniej oraz doboru najkorzystniejszego kształtu narzędzia. Pokazane pola prędkości ściśle spełniają wszystkie kinematyczne warunki brzegowe. Konstrukcja wzorów na prędkości przemieszczeń ma cechy uogólnienia analogicznych wzorów dla symetrii osiowej.

### 1. UWAGI WSTĘPNE

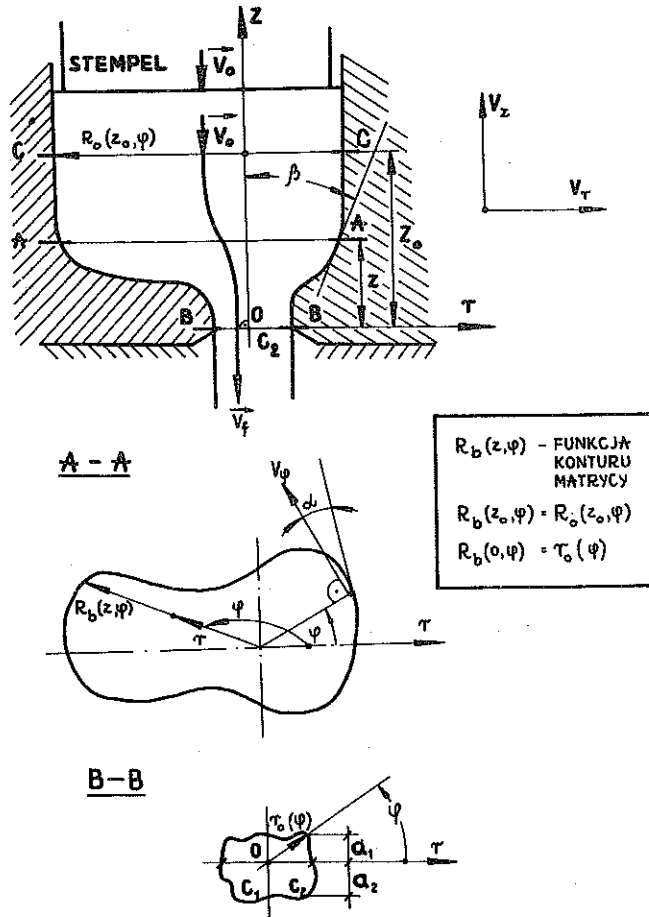
Analiza procesów wyciskania metali jest oparta głównie na modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego. Najczęściej w literaturze podawano oszacowanie górne dla sił wyciskania, które obliczano na podstawie odkształcenia plastycznego przebiegającego na kinematycznie dopuszczalnych polach prędkości przemieszczeń. Obliczanie sił umożliwia twierdzenia ekstremalne teorii plastycznego płynięcia, które są podstawowym narzędziem racjonalnej analizy obróbki plastycznej. Aktualnie nie ma kompletnych rozwiązań zagadnień brzegowych odpowiadających złożonym procesom wyciskania. Jest to związane z trudnościami matematycznymi przy rozwiązywaniu podstawowego układu równań stanu plastycznego, jak też brakiem danych brzegowych [1 i 2]. Dotychczas nie ma również metody obliczeniowej pól prędkości, odkształceń i naprężeń nawet przy wyciskaniu osiowo-symetrycznym [1 i 2].

Rozwiązanie problemu wyciskania prętów z nieregularnym kształtem profili poprzecznych jest na etapie formułowania kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości [3, 4 i 5].

W niniejszej pracy podano nowe wzory na kinematycznie dopuszczalne prędkości płynięcia plastycznego umożliwiające przewidywanie odkształceń w metalu poddanym wyciskaniu z niesymetrycznego pojemnika do niesymetrycznej matrycy.

## 2. ZALEŻNOŚCI I ZAŁOŻENIA PODSTAWOWE

Opis pól płynięcia plastycznego realizujemy w układzie współrzędnych  $r, z, \varphi$ . Ilustruje to rys. 1, na którym przedstawiono schemat niesymetrycznego wyciskania. Do opisu pól prędkości wprowadzamy pewne funkcje  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ , które są ciągłe i  $n$ -krotnie różniczkowalne w obszarze płynięcia plastycznego. Obszar ten jest ograniczony z boku powierzchnią matrycy i pojemnika, natomiast od dołu i od góry powierzchnią  $Z = 0$  i  $Z = Z_0$  (rys. 1). Profil pojemnika i matrycy jest określony jednoznacznie, ciągłą i  $n$ -krotnie różniczkowalną funkcją  $R_b(z, \varphi)$ . Oś współrzędnych  $z$  prowadzimy prostopadłe do przekroju  $B-B$  przez punkt  $O$ , określony współrzędnymi  $a_1, C_1$  lub  $a_2, C_2$ . Płaszczyzna przekroju  $B-B$  jest równoległa do płaskiej płaszczyzny czołowej stempla. Kąt  $\varphi$  określający położenie promienia  $r$  w płaszczyznach prostopadłych do osi  $z$  odmierzano od osi  $r$  w



Rys. 1

kierunku zaznaczonym na przekroju  $A-A$  z rys. 1. Kształt przekrojów  $A-A$ ,  $B-B$  i  $C-C$  jest ograniczony tylko założeniami nałożonymi na funkcję  $R_b(z, \varphi)$ . Przekroje te nie muszą być na przykład geometrycznie podobne.

Wektor prędkości przemieszczeń ma trzy składowe:  $V_r$ ,  $V_z$ ,  $V_\varphi$ . Składowe te określano następująco przez funkcje  $\Phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\Phi_2(r, z, \varphi)$ :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} V_r &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi_1(r, z, \varphi)}{\partial z} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi_2(r, z, \varphi)}{\partial \varphi}, \\ V_z &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi_1(r, z, \varphi)}{\partial r}, \\ V_\varphi &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi_2(r, z, \varphi)}{\partial r}. \end{aligned}$$

Składowe prędkości przemieszczeń (1.1) spełniają z definicji warunek nieściśliwości:

$$(2.2) \quad \dot{\epsilon}_{ii} = 0,$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_{ij}$  oznacza reprezentację tensora prędkości odkształceń.

Składowe tensora prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_{ij}$  określone są w układzie współrzędnych  $r, z, \varphi$  następującymi wzorami [5]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, \\ \dot{\epsilon}_\varphi &= \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \dot{\gamma}_{r\varphi} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}, \\ \dot{\gamma}_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \\ \dot{\gamma}_{rz} &= \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}. \end{aligned}$$

Do wyznaczenia zatem funkcji  $V_r(r, z, \varphi)$ ,  $V_z(r, z, \varphi)$ ,  $V_\varphi(r, z, \varphi)$  oraz składowych  $\dot{\epsilon}_{ij}(r, z, \varphi)$  niezbędna jest znajomość funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ . Funkcje te powinny spełniać wszystkie warunki brzegowe pól prędkości.

## 3. KINEMATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

Dziedziną funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  jest obszar płynięcia plastycznego. Materiał porusza się z prędkością stempla  $V_0$  w obszarze pomiędzy stemplem i przekrojem określonym płaszczyzną  $C-C$  zlokalizowaną współrzędną  $Z = Z_0$ . W przekroju  $C-C$ , jako granicy obszaru sztywnego z uplastycznionym, prędkość  $V_z = |V_0|$ , a składowe  $V_r$  i  $V_\varphi$  są równe zeru. W przekroju  $B-B$  na wyjściu z obszaru uplastycznienia składowa osiowa  $V_z = V_f$ , gdzie

$$V_f = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(Z_0, \varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r_0^2(0, \varphi) d\varphi} |V_0|,$$

$$(3.1) \quad R_b(z, \varphi) = R_0(z_0, \varphi)|_{z=z_0}, \quad R_b(z, \varphi)|_{z=0} = r_0(0, \varphi).$$

We wzorze (3.1) całka w liczniku jest polem powierzchni stempla, a mianownik odpowiada polu powierzchni przekroju  $B-B$ . Przyjmujemy też, że składowe  $V_r$  i  $V_\varphi$  w  $B-B$  są równe zeru. Zatem na powierzchniach ograniczających obszar uplastycznienia nie występują nieciągłości prędkości przemieszczeń.

Na powierzchni kontaktu matrycy i zdeformowanego plastycznie materiału składowa prędkości  $V_n$  w kierunku normalnym do tej powierzchni ma być równa zeru. Wynika to z nieprzenikalności materiału przez boczne powierzchnie matrycy i pojemnika. Składowa  $V_n$  ma postać

$$(3.2) \quad V_n = V_r \cos \beta \cos \alpha - V_z \sin \beta \cos \alpha - V_\varphi \cos \beta \sin \alpha,$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial z}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{R_b(z, \varphi)} \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Kąt  $\beta$  we wzorze (3.3) jest zawarty pomiędzy styczną do linii konturu matrycy w płaszczyźnie  $z-r$ , a kierunkiem osi  $z$ . Kąt  $\alpha$  we wzorze (3.3)<sub>2</sub> jest zawarty pomiędzy styczną do linii konturu matrycy w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $z$ , a kierunkiem prędkości obwodowej  $V_\varphi$  w tym punkcie (rys. 1). Zależności geometryczne (3.3) wynikają z faktu, że powierzchnia konturu pojemnika i matrycy jest opisana jednoznacznie, ciągłą i różniczkowalną względem  $z$  i  $\varphi$  funkcją  $R_b(z, \varphi)$ .

Po podstawieniu (3.3) do (3.2) otrzymamy warunek na składową prędkości  $V_n = 0$ :

$$(3.4) \quad V_r - V_z \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial z} - V_\varphi \frac{1}{R_b(z, \varphi)} \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Materiał znajdujący się za przekrojem  $B-B$  porusza się jako sztywny z prędkością  $V_f$  (3.1) określoną z bilansu przepływu. Wewnątrz obszaru plastycznego materiał spełnia warunek nieściśliwości (2.3), który po uwzględnieniu związków (5)<sub>1,2,3</sub> ma postać

$$\dot{e}_r + \dot{e}_z + \dot{e}_\varphi = 0.$$

Przepływ plastyczny ma charakter ustalony.

Kierując się wymaganiami sformułowanymi w punktach 2 i 3, przedstawimy propozycję analitycznego opisu pól prędkości w niesymetrycznym procesie wyciskania. Ogólne zależności przy analitycznym opisie takich pól omówiono w pracy [5]. Tutaj podamy konkretne, nowe wzory na funkcje  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi(r, z, \varphi)$ . Postać tych funkcji ma formę szeregów trygonometrycznych. Takie podejście umożliwia efektywne otrzymanie wzorów na składowe prędkości przemieszczeń.

#### 4. KONSTRUKCJA FUNKCJI $\phi_1(r, z, \varphi)$ , $\phi_2(r, z, \varphi)$

Postulujemy, że analityczna funkcja  $\phi_1(r, z, \varphi)$  ma formę sumy dwóch wyrazów. Jeden z nich ma postać

$$(4.1) \quad \phi_1^I(r, z, \varphi) = \frac{\pi r^2}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi}$$

Otrzymane z  $\phi_1^I(r, z, \varphi)$  bezwymiarowe składowe  $\frac{V_r}{|V_0|}$ ,  $\frac{V_z}{|V_0|}$  odpowiadają hipotezie płaskich przekrojów.

Drugi wyraz funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  jest szeregiem trygonometrycznym:

$$(4.2) \quad \phi_1^N(r, z, \varphi) = A_1(z, \varphi) \sin \pi r_n^2 + A_2(z, \varphi) \sin 2\pi r_n^2 + \dots + A_k(z, \varphi) \sin k\pi r_n^2,$$

gdzie  $k$  należy do liczb naturalnych, a funkcja  $r_n(r, z, \varphi)$  ma postać

$$(4.3) \quad r_n = \frac{r}{R_b(z, \varphi)}.$$

We wzorze (4.3) współrzędna  $r$  odmierzana jest w kierunku pokrywającym się z  $R_b(z, \varphi)$ . Wyjaśniono to na rys. 1 w przekroju  $A-A$ . Funkcje  $A_k(z, \varphi)$

mogą zależeć tylko od jednej zmiennej na przykład  $z$ . Wtedy szereg (4.2) będzie można rozdzielić względem współrzędnej  $z$ . Sumując (4.1) i (4.2) znajdziemy

$$(4.4) \quad \phi_1(r, z, \varphi) = \frac{\pi r^2}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi} + \sum_{k=1}^n A_k(z, \varphi) \sin k\pi r_n^2 \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z, \varphi) d\varphi |V_0|.$$

Funkcję  $\phi_2(r, z, \varphi)$  można wybierać ze zbioru dowolnych funkcji ciągłych i różniczkowalnych w obszarze uplastycznienia. W naszym przypadku postulujemy taką konstrukcję tej funkcji, aby dawała ona zerową składową obwodową prędkości  $V_\varphi$  na powierzchni konturu matrycy i pojemnika  $r = R_b(z, \varphi)$ . Ułatwia to znacząco spełnienie warunku (3.2) na  $V_n = 0$ .

Funkcję  $\phi_2(r, z, \varphi)$  przedstawimy również za pomocą szeregu trygonometrycznego

$$(4.5) \quad \phi_2(r, z, \varphi) = \left[ B_1(z, \varphi) \sin^2 \pi r_n^2 + B_2(z, \varphi) \sin^2 2\pi r_n^2 + \right. \\ \left. + \dots + B_k(z, \varphi) \sin^2 k\pi r_n^2 \right] \frac{\partial r_n}{\partial \varphi} z_0 |V_0|,$$

$$(4.5) \quad \phi_2(r, z, \varphi) = \left[ \sum_{k=1}^n B_k(z, \varphi) \sin^2 k\pi r_n^2 \right] \frac{\partial r_n}{\partial \varphi} z_0 |V_0|.$$

W dalszym ciągu założymy, że funkcje  $A_k(z, \varphi)$  i  $B_k(z, \varphi)$  występujące w (4.2) i (4.5) będą zależne tylko od zmiennej  $z$ .

Celem uwzględnienia warunków nieciągłości pól prędkości przemieszczeń i odkształceń w przekrojach  $C-C$  i  $B-B$  funkcje  $A_k(z)$  i  $B_k(z)$  muszą spełniać w przekrojach  $Z=0$  i  $Z=Z_0$  następujące warunki:

$$(4.6) \quad A_k(z) \Big|_{z=0}^{z=Z_0} = \frac{dA_k(z)}{dz} \Big|_{z=0}^{z=Z_0} = \frac{d^2 A_k(z)}{dz^2} \Big|_{z=0}^{z=Z_0} = 0,$$

$$(4.6) \quad B_k(z) \Big|_{z=0}^{z=Z_0} = \frac{dB_k(z)}{dz} \Big|_{z=0}^{z=Z_0} = \frac{d^2 B_k(z)}{dz^2} \Big|_{z=0}^{z=Z_0} = 0.$$

Wynika to ze wzorów (2.1) i (2.3).

Nieznanne funkcje  $A_k(z, \varphi)$  i  $B_k(z, \varphi)$  mogłyby być określone warunkami brzegowymi odnośnie do tarcia i rozwiązaniem podstawowego układu równań stanu plastycznego. Jednak przy znanych trudnościach obliczeniowych [1 i 2] funkcje te obieramy z góry. Funkcje  $A_k(z, \varphi)$ ,  $B_k(z, \varphi)$  muszą spełniać

wszystkie kinematyczne warunki brzegowe. Założony z góry kształt tych funkcji sprawia, że pola prędkości przemieszczeń (2.1) oraz prędkości odkształceń (2.3) otrzymane z  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  będą tylko kinematycznie dopuszczalne.

W dalszym ciągu szeregi (4.2) i (4.5) ograniczymy tylko do jednego wyrazu, zakładając dla prostoty, że funkcje  $A_k(z, \varphi) = B_k(z, \varphi)$ . Funkcje te dodatkowo zależą tylko od zmiennej  $z$ :

$$(4.7) \quad A_1(z) = B_1(z) = R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0}.$$

Funkcje  $A_1(z)$  i  $B_1(z)$  spełniają ściśle warunki (4.6). Podstawiając wielkości (4.7) i (4.5), otrzymamy efektywną postać wzorów na  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ :

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \phi_1(r, z, \varphi) = & \left[ \frac{\pi r^2}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi} + \right. \\ & \left. + R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2(z, \varphi)} \right] \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi |V_0|, \\ \phi_2(r, z, \varphi) = & \left[ R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \sin^2 \pi \frac{r^2}{R_b^2(z, \varphi)} \right] \times \\ & \times \left[ -\frac{r}{R_b^2(z, \varphi)} \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial \varphi} z_0 |V_0| \right], \end{aligned}$$

gdzie  $R$  oznacza stopień redukcji materiału określony wzorem

$$(4.9) \quad R = 1 - \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r_0^2(0, \varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi}, \quad R \in (0, 1).$$

Proces wyboru funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  z nieskończonego zbioru funkcji ciągłych i  $n$ -krotnie różniczkowalnych w objętości zdeformowanego plastycznie metalu opiera się przede wszystkim na intuicji. Podstawową przesłanką jest łatwość ścisłego spełnienia kinematycznych warunków brzegowych i jakościowa zgodność z doświadczeniem odnośnie do pól prędkości. Kolejno przy przewidywaniu tych funkcji kierujemy się dobrym ich kształtem do obliczeń numerycznych. Z drugiej strony ich postać powinna ułatwić wykorzystanie opisu pól prędkości do jakościowej optymalizacji procesu płynięcia plastycznego.

## 5. SKŁADOWE PRĘDKOŚCI PRZEMIESZCZEŃ

Wprowadźmy pomocnicze oznaczenie  $\eta(z)$ :

$$(5.1) \quad \eta(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi}, \quad \left. \frac{d\eta(z)}{dz} \right|_{\substack{z=0 \\ z=z_0}} = 0.$$

Następnie uwzględniając wzory (4.8) i (5.1) oraz (2.1) otrzymamy następującą postać składowych prędkości przemieszczeń:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} V_r = & \frac{r}{2} \frac{d\eta(z)}{dz} |\mathbf{V}_0| + \frac{1}{2\pi r} \left[ R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \cos \pi r_n^2 \cdot 2\pi r_n \frac{\partial r_n}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial T_n}{\partial Z} 2R \sin \pi \frac{z}{z_0} \cos \pi \frac{z}{z_0} \sin \pi r_n^2 \right] \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi |\mathbf{V}_0| + \\ & + \frac{1}{2\pi r} \left[ R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} 2 \sin \pi r_n^2 \cos \pi r_n^2 \cdot 2\pi r_n \left( \frac{\partial r_n}{\partial \varphi} \right)^2 + \right. \\ & \left. + R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \sin^2 \pi r_n^2 \frac{\partial^2 r_n}{\partial \varphi^2} \right] z_0 |\mathbf{V}_0|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_z = & -\eta(z) |\mathbf{V}_0| - \left[ R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \cos \pi r_n^2 \cdot 2\pi r_n \frac{\partial r_n}{\partial r} \right] \frac{1}{2\pi r} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi |\mathbf{V}_0|, \end{aligned}$$

$$V_\varphi = -\frac{R}{2\pi} \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} 2 \sin \pi r_n^2 \cos \pi r_n^2 \cdot 2\pi r_n \frac{\partial r_n}{\partial r} z_0 |\mathbf{V}_0|.$$

Funkcje  $V_r(r, z, \varphi)$ ,  $V_z(r, z, \varphi)$  i  $V_\varphi(r, z, \varphi)$  przedstawione wzorami (5.2) spełniają ściśle wszystkie kinematyczne warunki brzegowe. Składowe  $V_z$  w przekrojach  $C-C$  i  $B-B$  są ze wzoru (5.2) odpowiednio równe  $|\mathbf{V}_0|$  i  $V_f$ . Składowe  $V_r$  i  $V_\varphi$  w tych przekrojach są równe zero. Składowa normalna  $V_n$  wyrażona wzorem (3.2) jest równa zero, ponieważ podstawienie funkcji (5.2) do warunku (3.4) spełnia go tożsamościowo. Obwodowa składowa prędkości  $V_\varphi$  jest z założenia równa zero na powierzchni kontaktu materiału z matrycą. Warunek nieściśliwości jest spełniony tożsamościowo w całym obszarze uplastycznienia.

Zatem do obliczenia kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości należy podstawić do wzorów (5.2) dane odnoszące się do kształtu pojemnika i ma-



trycy, tj. funkcję  $R_b(z, \varphi)$ . Wielkość  $Z_0$  określającą obszar uplastycznienia przajmujemy, opierając się na doświadczeniach i intuicji. To samo dotyczy problemu lokalizacji osi współrzędnej  $z$ . Położenie osi  $z$  musi zawsze zapewniać jednoznaczność funkcji konturu  $R_b(z, \varphi)$ . Na osi  $z$  prędkości  $V_r$  i  $V_\varphi$  w przejściu granicznym  $r \rightarrow 0$  są równe zero.

Forma wzorów na  $V_r$ ,  $V_z$ ,  $V_\varphi$  umożliwia wprowadzenie do funkcji  $A_k(z, \varphi)$  i  $B_k(z, \varphi)$  parametrów skalarnych, które mogą być wyznaczone na drodze minimalizacji funkcjonau określającego moc odkształcenia plastycznego.

Wzory (5.2) można jeszcze bardziej uprościć do postaci

$$(5.3) \quad \begin{aligned} V_r &= -\frac{r}{2} \frac{d\eta(z)}{dz} |V_0|, \\ V_z &= -\eta(z) |V_0|, \quad V_\varphi = 0. \end{aligned}$$

Prędkościom tym przyporządkowane są funkcje

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \phi_1^I(r, z, \varphi) &= \frac{\pi r^2}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi |V_0|, \\ \phi_2(r, z, \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Prędkości (5.3) oraz funkcja  $\phi_1^I(r, z, \varphi)$  o postaci (5.4) odpowiadają przepływowi jednorodnemu. W przepływie tym składowe osiowe  $V_z$  nie zależą od promienia  $r$  i kąta  $\varphi$ . Z uproszczonych prędkości (5.3) można bardzo łatwo obliczyć ocenę górną sił wyciskania.

Należy dodać, że wyrażenie (5.2) określające składowe prędkości są poprawne również dla osiowej symetrii. Wtedy  $\phi_1(r, z, \varphi) = \phi_1(r, z)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi) = 0$ . Funkcja  $\phi_1(r, z)$  dla osiowej symetrii ma interpretację wydatku przepływu plastycznego. Funkcja  $\phi_1(r, z)$  dla osiowej symetrii jest stała wzdłuż linii prądu; stąd  $\phi_1(r, z)$  jest funkcją prądu [5 i 6].

## 6. PODSUMOWANIE

Przedstawiono nowe wyniki i sposób konstruowania wzorów umożliwiających opis pól kinematycznych w bardzo złożonym, niesymetrycznym procesie wyciskania. Opis ten może być wykorzystany do przewidywania przybliżonego rozkładu odkształceń i własności mechanicznych w końcowym wyrobie. Pokazany schemat płynięcia plastycznego może posłużyć do dokładnych obliczeń sił w procesie wyciskania prętów o złożonych przekrojach poprzecznych. Schemat ten umożliwia też analizę takich procesów pod kątem optymalizacji kształtu narzędzia.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
2. J. PIWNIK, *Metody obliczeń złożonych procesów obróbki plastycznej w świetle badań doświadczalnych*, Warszawa, Prace IPPT PAN, 14, 1979.
3. V. NAGPAL, *On the solution of three-dimensional metal-forming processes*, Trans. ASME, Ser. B, 99, p. 624, 1977.
4. M. KIUCHI, H. KISHI, M. ISHIKAWA, *Study on non symmetric extrusion and drawing*, Metallurgia i Odlewnictwo, 8, 2, 1978.
5. Л. Г. СТЕПАНЬСКИЙ, *Расчеты процессов обработки металлов давлением*, Машиностроение, Москва 1979.
6. J. PIWNIK, *Teoretyczna analiza procesów wyciskania rur z uwzględnieniem wzmocnienia materiału*, Rudy Metalu, 29, 9, 1984.

## РЕЗЮМЕ

## КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССА ВЫДАВЛИВАНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Работа представляет новое предложение аналитического описания кинематики процесса выдавливания стержней с поперечными сечениями о нерегулярной форме. Представлены аналитические формулы для трех составляющих скорости перемещений в области перехода материала в пластическое состояние подвергнутого выдавливанию из несимметричного резервуара в несимметричную матрицу. Форма описания полей скорости облегчает анализ сложного процесса выдавливания под углом расчетов сил с верхней оценки, а также подбора наиболее полезной формы инструмента. Указанные поля скоростей точно удовлетворяют всем кинематическим граничным условиям. Строение формул для скоростей перемещений имеет свойства обобщения аналогичных формул для осевой симметрии.

## SUMMARY

## KINEMATICS OF THE PROCESS OF EXTRUSION OF COMPLEX PROFILES

A novel method of analytical description of the extrusion process is proposed and applied to the case of rods characterized by irregular shapes of its cross-section. Analytical formulae are proposed for three displacement rate components within the plastic zone of the material extruded from an asymmetric container into an asymmetric extrusion die. Description of the velocity field makes it possible to analyze the complex process of extrusion, to estimate the upper bound of the force and select the most favourable form of the tool. The velocity field determined satisfy all the kinematic boundary conditions. The formulae giving the displacement rates constitute a generalization of the analogous relations concerning the axi-symmetric cases.

UNIwersytet Warszawski  
 Filia w Białymstoku  
 Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Białystok

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 maja 1985 r.