

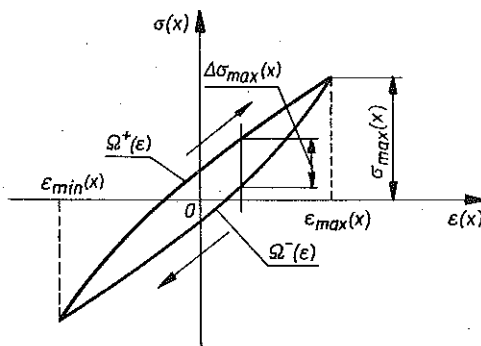
## DYSYPACJA ENERGII W PÓLNIESKOŃCZONYM PRĘCIE Z MATERIAŁU O WŁASNOŚCIACH PRAWIE SPRĘŻYSTYCH

WACŁAW GIERULSKI (KIELCE)

W pracy rozważono zagadnienie dysypacji energii mechanicznej w półnieskończonym cylindrycznym jednorodnym pręcie z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego, przy obciążeniu okresowo zmienną siłą o cyklu symetrycznym działającym na początku pręta. Własności materiału opisano pętlą histerezy o kształcie równoległoboku ze sztywnym odciażeniem. Przedstawiono równania opisujące zjawisko w sposób ścisły. Przedstawiono też przybliżoną metodę ich rozwiązania.

### 1. WSTĘP

Materiałem o własnościach prawie sprężystych nazywamy materiał dla którego, przy naprężeniach znacznie mniejszych od granicy sprężystości, charakterystyka  $\sigma(x) - \varepsilon(x)$  jest nieodwracalna, a gałęzie  $\Omega^+(\varepsilon)$ ,  $\Omega^-(\varepsilon)$  są mało odległe od siebie (rys. 1). Dla takiego materiału spełniona jest więc



Rys. 1

nierówność

$$(1.1) \quad \frac{\Delta \sigma(x)_{\max}}{\sigma(x)_{\max}} \ll 1.$$

Tego rodzaju własności są związane z całokształtem zjawisk zwanych tłumieniem wewnętrznym materiału oraz małą, ale jednak występującą, nieliniowością charakterystyki  $\sigma(x) - \varepsilon(x)$  dla prawie statycznych obciążeń. Pole zawarte między tymi gałęziami charakterystyki określa histerezę sprężystą, reprezentującą rozpraszanie energii mechanicznej pręta w zakresie odkształceń sprężystych. Podczas obciążenia okresowo zmienną siłą półnieskończonego pręta wykonanego z takiego materiału, część energii mechanicznej jest rozpraszana.

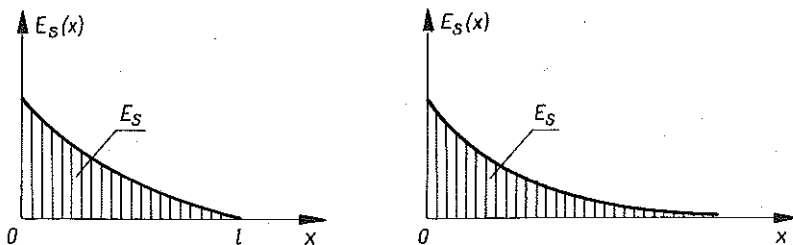
Przedstawiona praca zawiera rozważania dotyczące tej rozpraszanej energii. Będziemy zajmować się procesem ustalonym, rozumianym w ten sposób, że w każdym przekroju poprzecznym pręta ustala się cykl odkształceń i naprężeń przebiegających według pętli histerezy sprężystej. Proces drgań ustala się przy ilości cykli obciążenia zewnętrznego dążącej do nieskończoności, co wykazano w pracy [3].

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Celem przedstawionych rozważań jest określenie ilości traconej energii mechanicznej i jej rozkładu w czasie i wzdłuż długości półnieskończonego pręta przy obciążeniu siłą okresową. Ponieważ do układu dostarczona jest w przedziale czasu równym okresowi siły wynuszającej ( $2T$ ) ograniczona ilość energii mechanicznej, przeto także ilość dysypacji energii w czasie  $2T$  jest ograniczona i nie większa od ilości energii dostarczonej. Wytracana ona może być na skończonym odcinku pręta (rys. 2a) i wtedy jej wartość wynosi

$$(2.1) \quad E_s = \int_0^l E_s(x) dx,$$

gdzie  $E_s$  oznacza energię mechaniczną dysypowaną (traconą):  $E_s(x)$  ilość energii mechanicznej traconej w czasie  $2T$  w przekroju pręta o współrzędnej  $x$ ;  $l$  długość odcinka pręta, na którym tracona jest energia. Energia może być tracona na nieskończonym odcinku pręta (rys. 2b), lecz jej wartość musi być ograniczona.



Rys. 2

$$(2.2) \quad E_s = \int_0^{\infty} E_s(x) dx < \infty.$$

Rozkład wzdłuż długości pręta energii mechanicznej rozpraszanej w czasie okresu siły wymuszającej  $2T$  jest równy iloczynowi pola powierzchni histerezy opisującej zależność  $\sigma(x) - \varepsilon(x)$  dla przekroju o współrzędnej  $x$  i pola powierzchni przekroju pręta  $S(x)$

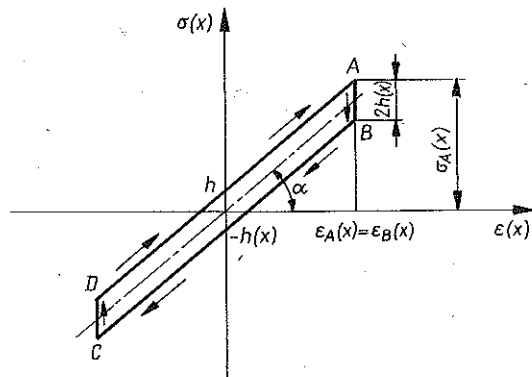
$$(2.3) \quad E_s(x) = S(x) \int_{\varepsilon_{\min}(x)}^{\varepsilon_{\max}(x)} [\Omega^+(\varepsilon) - \Omega^-(\varepsilon)] d\varepsilon,$$

gdzie  $S(x)$  oznacza pole powierzchni przekroju pręta. Średnią prędkość rozpraszania energii  $E_s^*(x)$  w wybranym przekroju pręta określamy wzorem (2.4)

$$(2.4) \quad E_s^*(x) = \frac{E_s(x)}{2T}.$$

Energia może być dysypowana w sposób ciągły (równomiernie lub nie) albo tylko w pewnych przedziałach czasu.

Przedstawioną na rys. 1 pętlę histerezy zastąpimy pętlą ograniczoną odcinkami prostej (rys. 3) tworzącymi równoległobok. Aproksymacji doko-



Rys. 3

nujemy według pewnej hipotezy. Na przykład zakładamy, że pole pętli histerezy ograniczonej krzywymi  $\Omega^+(\varepsilon)$ ,  $\Omega^-(\varepsilon)$  jest takie same jak pole pętli ograniczonej odcinkami prostej (2.5)

$$(2.5) \quad \int_{\varepsilon_{\min}(x)}^{\varepsilon_{\max}(x)} [\Omega^+(\varepsilon) - \Omega^-(\varepsilon)] d\varepsilon = 2h [\varepsilon_{\max}(h)] [\varepsilon_{\max}(x) - \varepsilon_{\min}(x)].$$

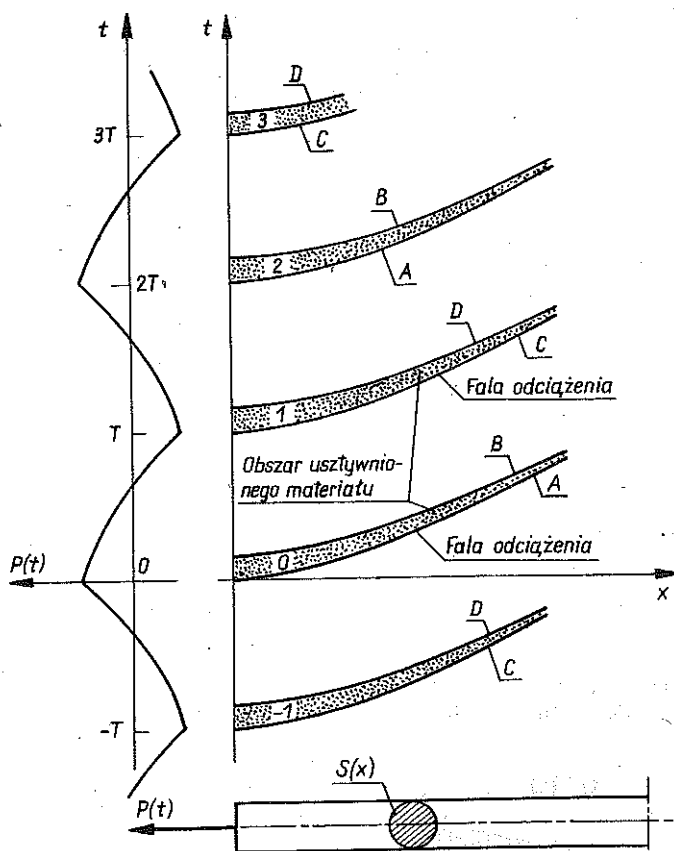
Natomiast grubość pętli wynosi

$$(2.6) \quad 2h [\varepsilon_{\max}(x)] = [\Omega^+(\varepsilon)]_{\varepsilon=0} - [\Omega^-(\varepsilon)]_{\varepsilon=0},$$

a kąt  $\alpha$  spełnia równanie

$$(2.7) \quad \operatorname{tg} \alpha = E = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\Omega^+(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{d\Omega^-(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \quad \text{dla} \quad x=0.$$

Na rys. 4 przedstawiony jest obraz rozwiązania falowego na płaszczyźnie fazowej, odpowiadający pętli histerezy o kształcie równoległoboku (rys. 3). W obszarach  $-1, 0, 1, 2, 3$ , którym odpowiada przejście od punktu  $A$  do punktu  $B$  lub  $C$  do  $D$ , na pętli histerezy z rys. 3 materiał pręta ulega zeszywnieniu, tzn. odkształcenie materiału dla każdego przekroju pręta jest stałe. W pozostałej części płaszczyzny fazowej rozchodzą się fale sprężyste. Ze względu na okresowy charakter obciążenia i odpowiedzi układy obszary  $0, 2, 4 \dots$ , a także  $-1, 1, 3 \dots$ , są przystające, a naprężenia i odkształcenia materiału występujące w nich są takie same. Wystarczy więc rozważania ograniczyć do obszaru o szerokości równej okresowi  $2T$ , a rozwiązania



Rys. 4

przenieść na pozostałe części płaszczyzny fazowej. Jeżeli dodatkowo siła obciążająca spełnia zależność

$$(2.8) \quad P(t) = -P(t+T),$$

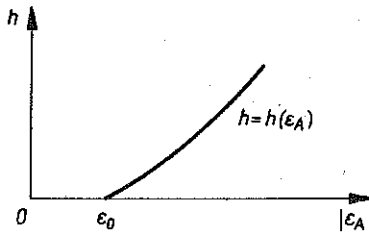
to wystarczy rozważania ograniczyć do obszaru o szerokości  $T$ , równej połowie okresu siły wymuszającej.

Zakładamy dodatkowo, że siła obciążająca posiada ekstremum co pół okresu. Linie  $A$  oraz  $C$  (rys. 4) stanowią fale odciążenia rozumiane jako granice między obszarami rosnących i nierosnących (co do wartości bezwzględnej) naprężeń i odkształceń. Grubość pętli histerezy określoną wielkością  $2h$  możemy przedstawić jako funkcję odkształcenia na fali odciążenia (rys. 5):

$$(2.9) \quad h = h(\varepsilon_A), \quad h \geq 0,$$

gdzie  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_C$  oznacza odkształcenie na fali odciążenia.

Wzór (2.9) wynika z własności materiału obciążonego pręta. Dla pętli histerezy ze sztywnym odciążeniem (rys. 3) ilość energii traconej w czasie jednego okresu w wybranym przekroju pręta na podstawie wzoru (2.3) wynosi



Rys. 5

$$(2.10) \quad E_s(x) = S(x) [\varepsilon_A(x) - \varepsilon_C(x)] 2h[\varepsilon_A(x)].$$

Całkowita energia mechaniczna rozpraszana w materiale pręta w czasie jednego okresu wynosi (na podstawie (2.1) lub (2.2))

$$(2.11) \quad E_s = 2 \int_0^l S(x) [\varepsilon_A(x) - \varepsilon_C(x)] h[\varepsilon_A(x)] dx$$

lub

$$(2.12) \quad E_s = 2 \int_0^{\infty} S(x) [\varepsilon_A(x) - \varepsilon_C(x)] h[\varepsilon_A(x)] dx.$$

Aby więc określić ilość rozpraszanej energii mechanicznej i sposób jej rozpraszania wzdłuż długości pręta, konieczne jest wyznaczenie odkształcenia

materiału na fali odciążenia  $\varepsilon_A(x)$  oraz  $\varepsilon_C(x)$  i długości strefy usztywnionego materiału. Konieczne jest więc wyznaczenie kształtu obszarów usztywnionego materiału.

### 3. RÓWNANIE RUCHU PRĘTA

Rozważać będziemy ustalony proces rozprzestrzeniania się fal naprężeń w półnieskończonym jednorodnym pręcie o stałym przekroju, wywołany siłą okresową  $P(t)$  o okresie  $2T$  przyłożoną do końca pręta. Opis zjawisk falowych będziemy prowadzić we współrzędnych Lagrange'a [1, 2]. Oś  $x$  pokrywać będzie się z osią pręta, początek układu współrzędnych przyjmiemy na początku pręta. Założymy, że odkształcenia pręta są małe, nie ulega on wyboczeniu, wpływ odkształceń poprzecznych na proces rozchodzenia się fal podłużnych jest pomijalnie mały, a gęstość materiału nie ulega zmianie. Stan naprężeń w elementach pręta przyjmiemy jako jednoosiowy. Przyjmujemy, że siła obciążająca pręt spełnia równanie (2.7), wystarczy więc opisać zjawiska zachodzące w obszarze płaszczyzny fazowej o szerokości połowy okresu czyli  $T$ .

Na rys. 6 przedstawiony jest schemat obciążeń pręta oraz obraz rozwiązania falowego na płaszczyźnie fazowej. Odpowiada on przejściu od stanu  $A$  do stanu  $C$  na pętli histerezy z rys. 3. Linie o równaniu  $t = \varphi(x)$ ,  $t = \varphi(x) + T$  lub funkcje odwrotne  $x = \Phi(t)$ ,  $x = \Phi(t - T)$  są to fale odciążenia. Natomiast linia  $t = \psi(x)$  lub  $x = \Psi(t)$  stanowi koniec strefy sztywnego materiału. Na pozostałej części płaszczyzny fazowej, a więc w obszarach I, II i III rozchodzą się fale sprężyste.

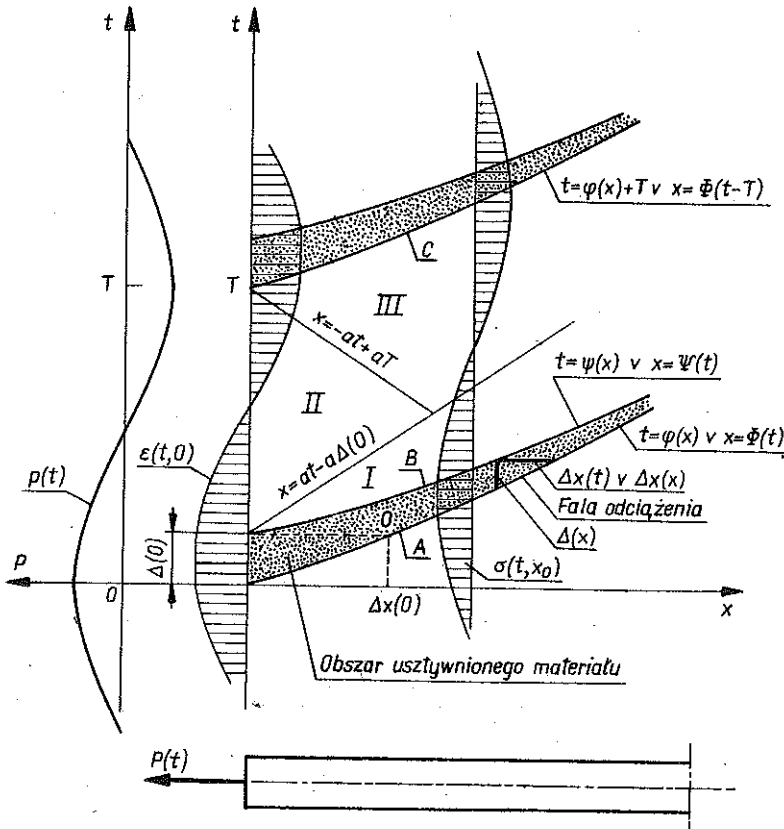
Wprowadzimy następujące oznaczenia:  $\sigma_A(x)$ ,  $\varepsilon_A(x)$ ,  $v_A(x)$ ,  $\sigma_C(x)$ ,  $\varepsilon_C(x)$ ,  $v_C(x)$  oznacza naprężenie, odkształcenie i prędkość na fali odciążenia, czyli w punktach  $A$  i  $C$  pętli histerezy,  $\sigma_B(x)$ ,  $\varepsilon_B(x)$ ,  $v_B(x)$ , naprężenie, odkształcenie i prędkość na linii  $t = \psi(x)$ , czyli w punkcie  $B$  pętli histerezy.

Z własności materiału wynikają zależności, które dla pętli histerezy z rys. 3 przyjmują postać następującą:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_A(x) &= E\varepsilon_A(x) + h(x), \\ \sigma_B(x) &= E\varepsilon_B(x) - h(x), \\ \sigma_C(x) &= E\varepsilon_C(x) - h(x), \end{aligned}$$

gdzie  $h(x)$  jest połową grubości pętli histerezy dla współrzędnej  $x$ . Także z własności materiału wynika związek (2.9), który tutaj napiszemy w postaci

$$(3.2) \quad h(x) = h[\varepsilon_A(x)].$$



Rys. 6

Następne równania otrzymamy wykorzystując okresowość rozwiązania dla odkształceń i prędkości

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_A(x) &= -\varepsilon_C(x), \\ v_A(x) &= -v_C(x). \end{aligned}$$

W strefie usztywnionego materiału odkształcenia w każdym przekroju pręta są stałe, a prędkości cząstek dla danej chwili czasu są równe. Tak więc dla cząsteczek leżących na brzegu tego obszaru zachodzą równości

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_A(x) &= \varepsilon_B(x), \\ v_A(t) &= v_B(t), \end{aligned}$$

lub wyrażając prędkość jako funkcję położenia, otrzymamy

$$(3.5) \quad v_A[x + \Delta x(x)] = v_B(x).$$

Niech  $\Delta x(t)$  oznacza szerokość strefy 0 dla czasu  $t$ ;  $\Delta x(x)$  szerokość strefy 0 dla czasu  $t = \psi(x)$  oraz

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Delta x(t) &= \Phi(t) - \Psi(t), \\ \Delta x(x) &= \Phi[\Psi(x)] - x. \end{aligned}$$

Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika dla strefy 0 równanie, dla  $t \geq \Delta(0)$

$$(3.7) \quad \sigma_A(t) - \sigma_B(t) = \rho \Delta x(t) \frac{dv_B(t)}{dt}$$

oraz dla  $0 \leq t \leq \Delta(0)$

$$(3.8) \quad \sigma_A(t) - p(t) = \rho \Phi(t) \frac{dv_B(t)}{dt},$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość materiału pręta oraz

$$p(t) = \frac{P(t)}{S(0)} = \sigma(x, t)|_{x=0},$$

naprężenie na początku pręta, a  $\Delta(0)$  czas przebywania początku pręta w strefie 0. Czas przebywania przekroju pręta o współrzędnej  $x$  w strefie 0 oznaczmy przez  $\Delta(x)$ :

$$(3.9) \quad \Delta(x) = \psi(x) - \varphi(x).$$

Różnica naprężeń na granicach strefy 0 dla przekroju o współrzędnej  $x$  jest równa grubości pętli histerezy dla tego przekroju

$$(3.10) \quad \sigma_A(x) - \sigma_B(x) = 2h(x).$$

Postulujemy, że przebieg naprężeń w czasie jest podobny do przebiegu naprężeń w czasie na początku pręta:

$$(3.11) \quad \sigma(x, t) = \frac{\sigma_A(x)}{\sigma_A(0)} p[t - \varphi(x)].$$

W pozostałej części płaszczyzny fazowej rozchodzą się fale sprężyste opisane równaniem falowym typu hiperbolicznego [2]:

$$(3.12) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial h(x)}{\partial x},$$

gdzie  $u(x, t)$  oznacza przemieszczenia cząsteczek pręta oraz  $a = \sqrt{E/\rho}$  prędkość rozchodzenia się fal sprężystych.

Równanie w postaci (3.12) jest słuszne tylko dla przejścia materiału ze stanu B do stanu C na pętli histerezy z rys. 3. Rozwiązanie tego



równania w postaci d'Alamberta [2] jest następujące:

$$(3.13) \quad u(x, t) = f_1(at - x) + f_2(at + x) + \frac{1}{E} \int_0^x [h(\bar{x}) - h(0)] d\bar{x}.$$

Natomiast odkształcenie  $\varepsilon(x, t)$  i prędkość  $v(x, t)$  określają wzory

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -f_1'(at - x) + f_2'(at + x) + \frac{1}{E} h(x) - \frac{1}{E} h(0), \\ v(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = af_1'(at - x) + af_2'(at + x). \end{aligned}$$

Funkcje  $f_1(at - x)$ ,  $f_2(at + x)$  zależą od warunków granicznych.

Korzystając z (3.14) wyznaczymy

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \varepsilon_C(x) &= \varepsilon_C[\varepsilon_B(x), v_B(x), p(t), \varphi(x), \psi(x)], \\ v_C(x) &= v_C[\varepsilon_B(x), v_B(x), p(t), \varphi(x), \psi(x)]. \end{aligned}$$

A w postaci jawnej związku te przyjmują postać

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \frac{1}{a} v_C(x) &= -\frac{1}{E} p \left[ \frac{a\varphi(x) + aT - x}{a} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] - \right. \\ &- \frac{1}{E} h [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] \left. \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] + \right. \\ &\left. + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] - \frac{1}{E} h [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] \right\}, \\ \varepsilon_C(x) &= \frac{1}{E} p \left[ \frac{a\varphi(x) + aT - x}{a} \right] + \frac{1}{E} h(x) - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] - \right. \\ &- \frac{1}{E} h [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] \left. \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] + \right. \\ &\left. + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] - \frac{1}{E} h [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] \right\}. \end{aligned}$$

Funkcja  $\beta(\vartheta)$  występująca w tych równaniach jest to funkcja odwrotna do funkcji  $\vartheta$ , czyli

$$(3.17) \quad \begin{aligned} x &= \beta(\vartheta), \\ \vartheta(x) &= a\psi(x) + x. \end{aligned}$$

Po prostych przekształceniach i wyrugowaniu niektórych zmiennych otrzymamy pięć równań w postaci:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} -\varepsilon_B(x) &= \frac{1}{E} p \left[ \frac{a\varphi(x) + aT - x}{a} \right] + \frac{1}{E} h(x) + \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{E} h [\beta \langle a\varphi(x) + aT - x \rangle] \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] - \frac{1}{E} h [\beta \langle a\varphi(x) + aT + x \rangle] \right\}, \\ -\frac{1}{a} v_B(x) &= -\frac{1}{E} p \left[ \frac{a\varphi \langle x + \Delta x(x) \rangle + aT - \langle x + \Delta x(x) \rangle}{a} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi [x + \Delta x(x)] + aT - [x + \Delta x(x)] \rangle] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi [x + \Delta x(x)] + aT - [x + \Delta x(x)] \rangle] \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B [\beta \langle a\varphi [x + \Delta x(x)] + aT + [x + \Delta x(x)] \rangle] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_B [\beta \langle a\varphi [x + \Delta x(x)] + aT + [x + \Delta x(x)] \rangle] \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ h [\beta \langle a\varphi [x + \Delta x(x)] + aT - [x + \Delta x(x)] \rangle] + \right. \\ &\quad \left. + h [\beta \langle a\varphi [x + \Delta x(x)] + aT + [x + \Delta x(x)] \rangle] \right\}, \\ E\varepsilon_B[x + \Delta x(x)] + h[x + \Delta x(x)] - E\varepsilon_B(x) + h(x) &= \\ &= \frac{E}{a^2} \Delta x(x) \frac{dv_B(x)}{dx} - \frac{1}{\frac{d(x)}{dx}}, \end{aligned}$$

$$2h(x) = \frac{E\varepsilon_B(x) + h(x)}{p(0)} [p(0) - p \langle \Delta(x) \rangle],$$

$$h(x) = h[\varepsilon_B(x)],$$

(co jest równoważne (2.9)). Równania (3.18) po uwzględnieniu w nich (3.6), (3.9), (3.17) stanowią układ równań z niewiadomymi funkcjami  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $h(x)$ ,  $\varepsilon_B(x)$ ,  $v_B(x)$ . Wyznaczenie  $\varepsilon_B(x)$  pozwala na określenie rozkładu traconej energii mechanicznej wzdłuż długości pręta. Na podstawie (2.10) oraz (2.11) otrzymamy

$$(3.19) \quad E_s(x) = 4S\varepsilon_B(x) h[\varepsilon_B(x)],$$

$$E_s = 4S \int_0^l \varepsilon_B(x) h[\varepsilon_B(x)] dx.$$

Koniec odcinka pręta, w którym występuje dysypacja energii jest w punkcie przecięcia krzywych  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ , co odpowiada współrzędnej  $x$ , dla której  $h(x) = 0$ . Ścisłe rozwiązanie równań w sposób analityczny nie jest możliwe przedstawiamy więc rozwiązanie przybliżone.

#### 4. ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE

Przedstawione rozwiązanie jest liniowym rozwinięciem wokół rozwiązania falowych równań drgań pręta dla liniowej charakterystyki  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (bez pętli histerezy). Rozwiązanie to stosowne jest dla małych wartości  $h(x)$ , czyli „cienkich” pętli histerezy. Korzystamy z założenia, że wtedy rozwiązanie mało różni się od rozwiązania bez pętli histerezy. Przyjmujemy, że  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $v$  są sumami rozwiązań dla układu bez pętli histerezy  $\sigma^0$ ,  $\varepsilon^0$ ,  $v^0$  czyli dla  $h(x) \equiv 0$  i małej poprawki  $\delta\sigma$ ,  $\delta\varepsilon$ ,  $\delta v$ . Poprawka ta uwzględnia wpływ pętli histerezy

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_B(x) &= \sigma_B^0(x) + \delta\sigma_B(x), \\ \varepsilon_B(x) &= \varepsilon_B^0(x) + \delta\varepsilon_B(x), \\ v_B(x) &= v_B^0(x) + \delta v_B(x). \end{aligned}$$

Przyjmijmy, że funkcja  $t = \psi(x)$  jest liniowa

$$(4.2) \quad \psi(x) = \frac{1}{b} x + \Delta(0).$$

Wtedy według (3.17) będzie

$$(4.3) \quad \beta(\vartheta) = \frac{b}{a+b} [\varphi(x) - a\Delta(0)],$$

oraz

$$(4.4) \quad \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{b}$$

Falę odciążenia przedstawiamy w postaci

$$(4.5) \quad \varphi(x) = \frac{1}{b} x + \Delta(0) - \Delta(x).$$

Przyjmujemy przybliżoną zależność

$$(4.6) \quad \Delta x(x) = b\Delta(x).$$

Rozwijając poszczególne funkcje w równaniach (3.18) w szereg Taylora i zachowując tylko początkowe wyrazy rozwinięcia, otrzymamy układ zlinearyzowanych równań w następującej postaci

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{a} \delta v'_B(x) + \delta \varepsilon'_B(x) \right] \frac{b}{a+b} x + \delta \varepsilon_B(x) + \frac{1}{E} h(x) - \frac{1}{E} h'(x) \frac{1}{a+b} x - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{a} v_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] - \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{a} v_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] + \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] \right\} \times \\ & \quad \times \frac{ab}{a+b} \Delta(x) - \frac{1}{E} p' \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] \Delta(x) = F_1(x), \\ & F_1(x) = -\varepsilon_B^0(x) - \frac{1}{E} p \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{a} v_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] - \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] \right\}, \\ (4.7) \quad & \left[ \frac{1}{a} \delta v'_B(x) + \delta \varepsilon'_B(x) \right] \frac{b}{a+b} (-x + aT) + 2 \frac{1}{a} \delta v_B(x) + \\ & \quad + \delta \varepsilon_B(x) - \frac{1}{E} h(x) - \frac{1}{E} h'(x) \frac{b}{a+b} (-x + aT) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{a} v_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] - \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{a} v_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] + \varepsilon_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] \left\} \times \right. \\ \left. \times \frac{b^2}{a+b} \Delta(x) + \frac{1}{E} p' \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] \frac{b}{a} \Delta(x) = F_2(x), \right.$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{a} v_B^0(x) + \frac{1}{E} p \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{a-b}{b} x + aT + a\Delta \right) \right] - \\ - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} v_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{a} v_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] + \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] \right\}, \\ h(x) = \frac{1}{2} E \left[ \frac{b^2}{a^2} v_B^{0'}(x) - b \varepsilon_B^{0'}(x) - \frac{1}{2} \varepsilon_B^{0''}(x) b^2 \Delta(x) \right] \Delta(x),$$

gdzie

$$v_B^{0'}(x) = \frac{dv_B^0(x)}{dx},$$

$$\varepsilon_B^{0'}(x) = \frac{d\varepsilon_B^0(x)}{dx};$$

$$(4.8) \quad h(x) = \frac{1}{2} \left| \frac{E\varepsilon_B^0(x)}{p(0)} \right| \left[ -p'(t) \right]_{t=0} \Delta(x) + \frac{1}{4} \left| \frac{E\varepsilon_B^0(x)}{p(0)} \right| \left[ -p''(t) \right]_{t=0} \Delta^2(x),$$

gdzie

$$(4.9) \quad p'(t) = \frac{dp(t)}{dt}, \quad p''(t) = \frac{d^2p(t)}{dt^2},$$

$$h(x) = h[\varepsilon_B^0(x)].$$

Przyjmijmy ponadto, że  $\Delta(x)$  jest znaną malejącą funkcją  $v$  zależną od parametru  $\lambda$ :

$$(4.10) \quad \Delta(x) = v(x, \lambda),$$

$v(0, \lambda) = \Delta(0)$  dla każdej  $\lambda$ . Założenie kształtu dwóch funkcji  $\psi(x)$  i  $\Delta(x)$  sprawia, że układ równań (4.7)–(4.9) nie posiada rozwiązania dla każdej wartości współrzędnej  $x$ . Osłabimy więc warunki narzucone przez te równania, zażądamy, aby równanie (4.8) było spełnione tylko dla jednej wybranej wartości  $x = x_0$  oraz zrezygnujemy z równania (4.9). Wyznamy natomiast, po obliczeniu  $h(x)$  i  $\varepsilon_B^0(x)$ , funkcję  $h[\varepsilon_B^0(x)]$  dla różnych wartości para-

metru  $\lambda$ . Tak więc z pozostałych równań (4.7) wyznaczmy niewiadome funkcje  $h(x)$ ,  $\delta\varepsilon_B(x)$  i  $\delta v_B(x)$  zależne od parametrów  $b, \lambda$

$$h(x, b, \lambda) = \frac{1}{2} E \left[ \frac{b^2}{a^2} v_B^{0'}(x) - b\varepsilon_B^{0'}(x) - \frac{1}{2} \varepsilon_B^{0''}(x) b^2 v(x, \lambda) \right] v(x, \lambda),$$

(4.11)

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_B(x, b, \lambda) = & F_1(x) - \frac{b}{a+b} x \left\{ F_{1,2}(x) - 2 \frac{a+b}{abT} e^{-2 \frac{a+b}{abT} x} \times \right. \\ & \times \left[ \int_0^x F_{1,2}(\bar{x}) e^{2 \frac{a+b}{abT} \bar{x}} d\bar{x} + \frac{1}{a} \delta v_B(0) \right] \left\} - \frac{1}{E} h(x) + \frac{1}{E} h'(x) \frac{b}{a+b} x + \right. \\ & + \frac{1}{E} p' \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] v(x, \lambda) + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{a} v_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} x + \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] - \varepsilon_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \right. \\ & + \frac{1}{a} v_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] + \\ & \left. + \varepsilon_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] \right\} \frac{ab}{a+b} v(x, \lambda), \end{aligned}$$

(4.12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \delta v_B(x, b, \lambda) = & e^{-2 \frac{a+b}{abT} x} \left[ \int_0^x F_{1,2}(\bar{x}) e^{2 \frac{a+b}{abT} \bar{x}} d\bar{x} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{a} \delta v_B(0) \right] - \delta\varepsilon_B(x, b, \lambda), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} F_{1,2}(x) = & \frac{a+b}{abT} \left\{ F_1(x) + F_2(x) + \frac{1}{E} h'(x) \frac{b}{a+b} aT - \right. \\ & - \frac{1}{E} p' \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] \frac{b-a}{a} v(x, \lambda) - \\ & - \frac{1}{2} \left\langle -\frac{1}{a} v_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] - \varepsilon_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a-b}{b} x + aT \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{a} v_B^{0'} \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon_B^0 \left[ \frac{b}{a+b} \left( \frac{a+b}{b} x + aT \right) \right] \left. \vphantom{\frac{b}{a+b}} \right\} \frac{b(b-a)}{a+b} v(x, \lambda) \Bigg\},$$

$\delta v_B(0)$  przyjmujemy dowolnie.

Równanie 4.8 napisane dla wybranej współrzędnej  $x = x_0$  traktujemy jako uwikłane równanie ze względu na niewiadomą  $b$ . Będzie to równanie w postaci następującej:

$$(4.13) \quad h(x_0, b, \lambda) = -\frac{1}{2} \frac{E\varepsilon_B^0(x_0, b, \lambda)}{p(0)} \left\{ [p'(t)]_{t=0+} + \frac{1}{2} [p''(t)]_{t=0} v(x_0, \lambda) \right\} v(x_0, \lambda).$$

Dla rozważanego półnieskończonego pręta obciążonego na swobodnym końcu będzie

$$(4.14) \quad \varepsilon_B^0(x) = \frac{1}{E} p \left( \frac{a-b}{ab} x \right),$$

$$\frac{1}{a} v_B^0(x) = -\frac{1}{E} p \left( \frac{a-b}{ab} x \right).$$

Jeżeli przyjmiemy  $x_0 = 0$ , czyli zakładamy, że spełnione są równania (4.13) na początku pręta, to wtedy po uwzględnieniu (4.14) otrzymamy proste wzory określające współczynnik  $b$ :

$$(4.15) \quad b = a \sqrt{1 - \frac{p'(0)_+}{p'(0)_-}}$$

jeżeli

$$p'(0) = \left[ \frac{dp(t)}{dt} \right]_{t=0} \neq 0,$$

od strony lewej i prawej, lub

$$(4.16) \quad b = a \left[ 1 + \sqrt{\frac{p''(0)_+}{p''(0)_-}} \right] \quad \text{dla} \quad p'(0) = 0.$$

Pozostałe wzory przyjmą postać nieco prostszą:

$$(4.17) \quad h(x, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{b-a}{a} \left[ \frac{b+a}{a} p' \left( \frac{a-b}{ab} x \right) - \frac{1}{2} \frac{b-a}{a} p'' \left( \frac{a-b}{ab} x \right) v(x, \lambda) \right] v(x, \lambda),$$

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad \frac{\delta \varepsilon_B(x, \lambda)}{[ed]} &= -\frac{b}{a+b} x \left\{ F_{1,2}^*(x) - 2 \frac{a+b}{abT} e^{-2 \frac{a+b}{abT} x} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \int_0^x F_{1,2}^*(\bar{x}) e^{2 \frac{a+b}{abT} \bar{x}} d\bar{x} + \frac{1}{a} \delta v_B(0) \right] \right\} - \frac{1}{E} h(x) + \\
 &\quad + \frac{1}{E} h'(x) \frac{b}{a+b} x + \frac{1}{E} p' \left( \frac{a-b}{ab} x \right) v(x, \lambda), \\
 \frac{1}{a} \delta v_B(x, \lambda) &= e^{-2 \frac{a+b}{abT} x} \left[ \int_0^x F_{1,2}^*(\bar{x}) e^{2 \frac{a+b}{abT} \bar{x}} d\bar{x} + \frac{1}{a} \delta v_B(0) \right] - \delta \varepsilon_B(x),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$F_{1,2}^*(x) = \frac{1}{E} h'(x) - \frac{1}{E} \frac{a+b}{abT} \left( \frac{b}{a} - 1 \right) p' \left( \frac{a-b}{ab} x \right) v(x, \lambda).$$

## 5. PRZYKŁADY OKREŚLANIA ROZKŁADU DYSYPOWANEJ ENERGII

### PRZYKŁAD 1

Przyjmujemy, że na swobodny koniec pręta działa  $d$  siła, której nacisk określony jest w sposób następujący (rys. 7):

$$(5.1) \quad p(t) = A \cos \frac{\pi}{T} t.$$

Natomiast funkcję określającą kształt strefy usztywnionej przyjmiemy w postaci wykładniczej:

$$(5.2) \quad \Delta(x) = v(x, \lambda) = \Delta(0) e^{-\lambda x}, \quad \Delta(0) = 0,1 T.$$

Wtedy zgodnie ze wzorami (4.14)–(4.16) otrzymamy

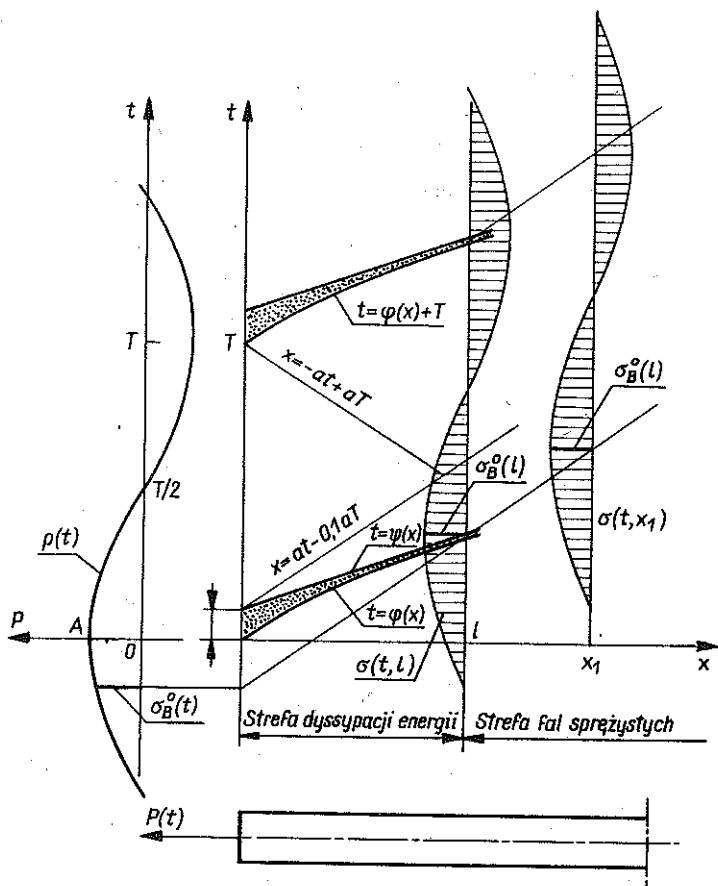
$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad &b = 2a, \\
 &\varepsilon_B^0(x) = \frac{A}{E} \cos \frac{\pi}{2aT} x, \\
 &\frac{1}{a} v_B^0(x) = -\frac{A}{E} \cos \frac{\pi}{2aT} x,
 \end{aligned}$$

$$h(x, \lambda) = 0,05 A \pi e^{-\lambda x} \left[ 3 \sin \frac{\pi}{2aT} x + 0,05 \pi e^{-\lambda x} \cos \frac{\pi}{2aT} x \right].$$



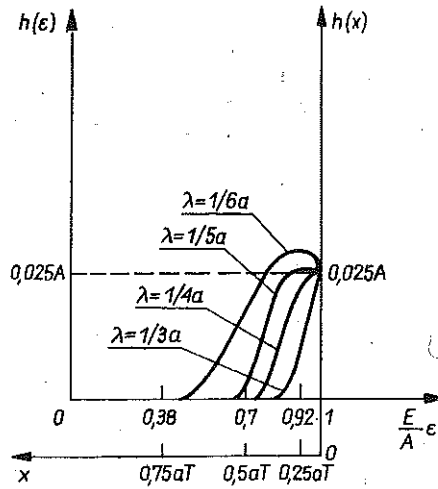
Rozkład energii dysypowanej na podstawie (3.19) określimy wzorem

$$(5.4) \quad E_s(x) = 4S \frac{A^2}{E} \cos\left(\frac{\pi}{2aT} x\right) 0,05 \pi e^{-\lambda x} \left[ 3 \sin \frac{\pi}{2aT} x + \right. \\ \left. + 0,05 \pi e^{-\lambda x} \cos \frac{\pi}{2aT} x \right]$$

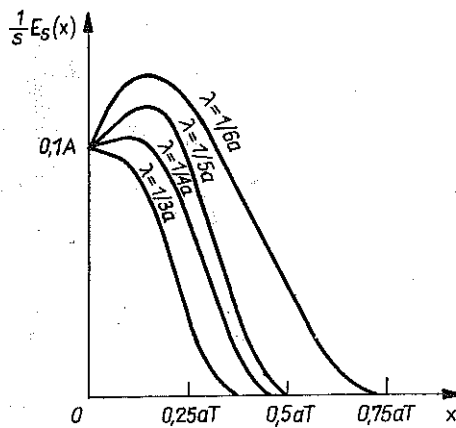


Rys. 7

Na rys. 7 przedstawiony jest obraz rozwiązania falowego na płaszczyźnie fazowej dla  $\lambda = 10/(aT)$ . Przyjęto, że energia ulega dysypacji na odcinku  $l = (aT)/2$ ; w dalszej części pręta ilość traconej energii jest pomijalnie mała. Na rys. 8 pokazano wykres funkcji  $h = h(\varepsilon^0)$  oraz  $h(x)$ , a na rys. 9 — funkcji  $E_s(x)$  dla różnych wartości parametru  $\lambda$ .



Rys. 8



Rys. 9

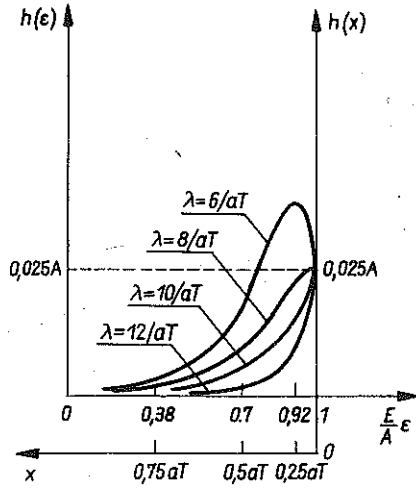
## PRZYKŁAD 2

Siła obciążająca koniec pręta jest taka sama jak w przykładzie 1 a funkcję określającą kształt strefy usztywnionej przyjmujemy w postaci liniowej:

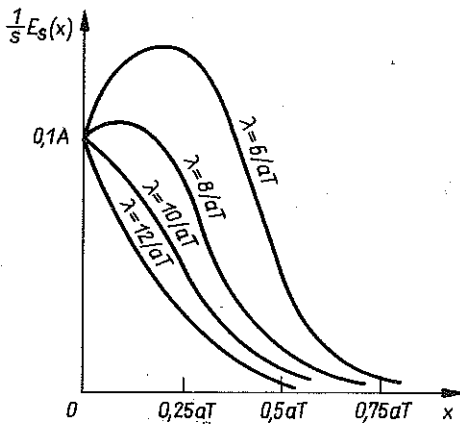
$$(5.5) \quad \Delta(x) = v(x, \lambda) = \Delta(0) - \lambda x.$$

Wtedy dla  $\Delta(0) = 0,1 T$  oraz  $b = 2a$  otrzymamy

$$h(x, \lambda) = \frac{1}{2} A (0,1T - \lambda x) \left[ 3 \frac{\pi}{T} \sin \frac{\pi}{2aT} x + \right]$$



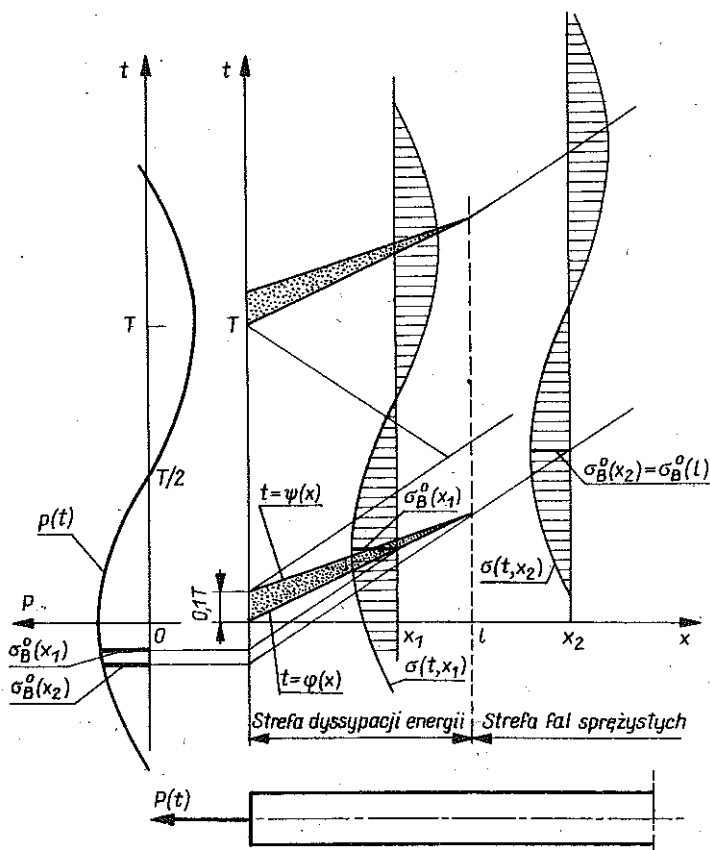
Rys. 10



Rys. 11

$$(5.6) \quad E_s(x) = 2 \frac{A}{E} S \cos \frac{\pi}{2aT} x (0,1T - \lambda x) \left[ 3 \frac{\pi}{T} \sin \frac{\pi}{2aT} x + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{T^2} \cos \frac{\pi}{2aT} x (0,1T - \lambda x) \right] + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{T^2} \cos \frac{\pi}{2aT} x (0,1T - \lambda x)$$

Na rys. 10 pokazano wykres funkcji  $h = h(\epsilon^0)$  oraz  $h(x)$ , na rys. 11 — funkcji  $E_s(x)$  dla różnych wartości parametru  $\lambda$  a na rys. 12 wykres



Rys. 12

rozwiązania falowego na płaszczyźnie fazowej dla  $\lambda = 1/6a$ . Długość pręta, na którym energia jest dyssypowana wynosi

$$(5.7) \quad l = 0.6aT.$$

W dalszej części pręta rozchodzą się już tylko fale sprężyste.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. *Drgania i fale*, red. S. KALISKI, PWN, Warszawa 1966.
2. W. K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1974.
3. J. OSIECKI, *Propagation of plastic strain waves in a semi-infinite bar produced by a periodic load*, Proc. Vibr. Probl. 3, 2, 1962.

## РЕЗЮМЕ

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ  
ИЗ МАТЕРИАЛА С ПОЧТИ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ

В работе рассмотрена проблема диссипации механической энергии в полубесконечном цилиндрическом однородном стержне, с учетом внутреннего затухания, при нагружении периодически переменной силой с симметричным циклом, действующей на начало стержня. Свойства материала описаны петлей гистерезиса в форме параллелограмма с жесткой разгрузкой. Представлены уравнения описывающие явление точным образом. Представлен тоже приближенный метод их решения.

## SUMMARY

ENERGY DISSIPATION IN A SEMI-INFINITE ROD MADE OF ALMOST  
ELASTIC MATERIAL

Dissipation of mechanical energy is considered in a semi-infinite homogeneous cylindrical rod exhibiting internal damping, under the action of periodically variable force applied at the origin of the rod. The material properties are described by the hysteresis loop in the form of a parallelogram with rigid unloading. The accurate equation governing the phenomenon is derived, and an approximate method of solution is proposed.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, KIELCE

*Praca złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1985 r.*

---