

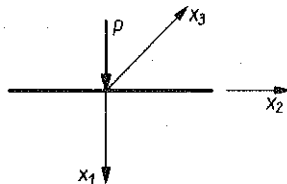
MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA ANALOGII ELEKTRYCZNEJ DO ROZWIĄZYWANIA PEWNYCH ZAGADNIENI Z TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

JERZY ŚLIWKA (GLIWICE)

Przeprowadzono badania nad możliwością zastosowania analogii elektrycznej do określenia rozkładu naprężeń w półprzestrzeni sprężystej pod obciążeniem przekazanym przez sztywne ciało o ograniczonej powierzchni. Praca ma charakter rozpoznawczy w zakresie technologicznej możliwości badań, dokładności metody i jej praktycznego zastosowania w budownictwie.

1. WSTĘP

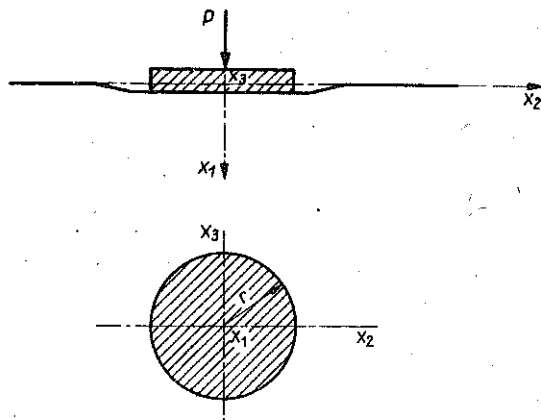
W ramach prac badawczych nad rozkładem naprężeń w gruntach pod obciążeniami skupionymi zainteresowała autora w niniejszej pracy propozycja rozwiązania zagadnienia na drodze badań doświadczalnych przy wykorzystaniu analogii elektrycznej [1, 2, 3, 4, 5, 6 i 8]. Postanowiono więc przeprowadzić badania nad rozkładem naprężeń w półprzestrzeni sprężystej pod obciążeniem skupionym według schematu z rys. 1. Okazało się jednak



Rys. 1. Siła skupiona obciążająca półprzestrzeń sprężystą

w praktyce, że przy punktowym przyłożeniu napięcia jest utrudniony pomiar rozkładu potencjału w badanym ciele. Pomiarzy dla takiego przypadku były obciążone dużym błędem ze względu na gwałtowny spadek potencjału występującego w pobliżu punktu przyłożenia napięcia i brak odpowiednio dokładnych urządzeń pomiarowych pozwalających na właściwy pomiar spadku tego potencjału.

Z tych względów zdecydowano się na przeprowadzenie badań dla przypadku obciążenia półprzestrzeni sprężystej obciążeniem skupionym działającym przez sztywną podkładkę (sztywny fundament) o określonej powierzchni (rys. 2). Dla tego przypadku nie ma co prawda ogólnego rozwiązania



Rys. 2. Półprzestrzeń obciążona na powierzchni kołowej

teoretycznego skończonego, pozwalającego na łatwą weryfikację badań dla dowolnego punktu półprzestrzeni sprężystej, ale w trakcie doświadczenia uzyskano większą dokładność pomiarów. Weryfikacje badań przeprowadza się natomiast dla punktów leżących na osi pionowej w środku obciążenia, dla których to punktów można określić stan napięcia [2 i 3].

Tak przeprowadzone badania miały na celu określenie przydatności przyjętej metody do rozwiązania niektórych problemów z teorii sprężystości z zakresu praktyk inżynierskich. Istotą badań jest określenie funkcji rozkładu potencjału, której wykorzystanie [1 i 5], pozwala metodami matematycznymi wyznaczyć stan odkształceń i naprężeń w badanym ciele.

2. PODSTAWA TEORETYCZNA

Podstawy teoretyczne przedmiotowych badań przedstawia się tu w postaci uzyskanej w pracach [1, 2, 3, 4, 5 i 6].

Przy znanej funkcji Φ naprężenia i przemieszczenia określają wzory następujące:

$$u_1 = 2(1-\nu)\Phi - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1},$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= (1-2\nu) \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\
 u_3 &= (1-2\nu) \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \\
 \sigma_{11} &= 2G \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \right], \\
 \sigma_{22} &= 2G \left[2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (1-2\nu) \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} dx_1 - x_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right], \\
 \sigma_{33} &= 2G \left[2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (1-2\nu) \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} dx_1 - x_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right], \\
 \sigma_{12} &= -2G x_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
 \sigma_{13} &= -2G x_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3}, \\
 \sigma_{23} &= -2G \left[(1-2\nu) \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} dx_1 - x_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} \right],
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

gdzie Φ oznacza funkcję potencjału, u przemieszczenia, ν współczynnik Poissona, σ naprężenie oraz G moduł sprężystości postaciowej. Zakładamy przy tym, że pod obciążeniem nie wystąpi tarcie, tj. że na powierzchni dla $x_1 = 0$ $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$.

Funkcja Φ jest potencjałem spełniającym równania w całym ciele z wyjątkiem punktów obciążonych na powierzchni. Dalej można przyjąć [5], że funkcja ta ma postać

$$\Phi = \frac{P}{4\pi GR}$$

oraz że

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{x_1^2 + (x_2 - \xi)^2 + (x_3 - \eta)^2}, \\
 P &= \int_F p(\xi, \eta) d\xi d\eta,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

gdzie ξ , η oznaczają współrzędne elementu obciążającego płaszczyznę półprzestrzeni, P oznacza obciążenie skupione, R odległość od przyłożonego obciążenia do punktu, w którym chcemy wyznaczyć wartość funkcji, $p(\xi, \eta)$ obciążenie jednostkowe zależne od współrzędnych ξ , η , oraz F pole elementu. W myśl rozważań w pracy [5 i 6] funkcja może być dowolną ilość razy różniczkowana i całkowana względem wszystkich zmiennych x_1, x_2, x_3 przy zachowaniu przemienności w kolejności wykonywanych działań.

W pracy podjęto próbę doświadczalnego wyznaczenia funkcji Φ na podstawie analogii elektrycznej. Wiadomo [7], że potencjał w dowolnym punkcie badanego ciała określa zależność

$$(2.3) \quad \Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon R},$$

lub gdy jest znane natężenie prądu

$$(2.4) \quad \Phi = \frac{I}{4\pi q R},$$

gdzie Q oznacza ładunek elektryczny, I natężenie prądu, ϵ stałą dielektryczną oraz q opór właściwy ośrodka. Jak widać z powyższego funkcje (2.2), (2.3) lub (2.4) różnią się jedynie stałymi, co pozwala na proste modelowanie.

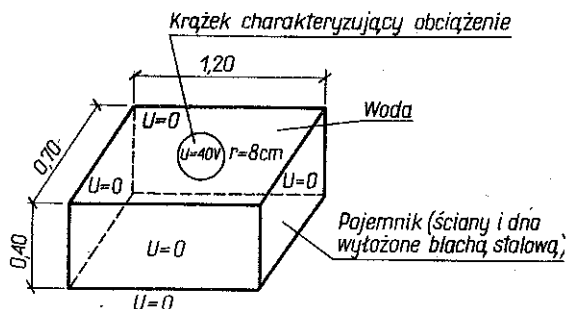
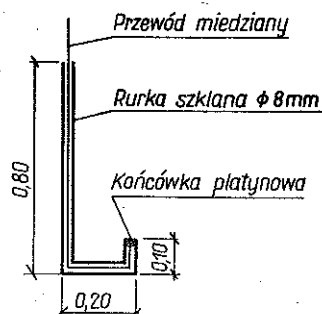
3. OPIS BADAŃ

Badania przeprowadzono na aparaturze Zakładu Optyki Elektrycznej Instytutu Technologii Elektronowej Politechniki Wrocławskiej. Aparatura składała się z zasilacza wanny elektrolitycznej, wanny elektrolitycznej i sondy.

Wannę elektrolityczną napełniono wodą czystą z kranu, ponieważ wykazała ona większą przydatność do badań. Zasolenie wody lub jej destylowanie pogarszało warunki rozkładu potencjału. Wymiary wanny podano na rys. 3. Wannę napełniono wodą do głębokości 40 cm. Dno i ściany wanny były wyłożone blachą stalową, do których przyłożono napięcie elektryczne równe 0.

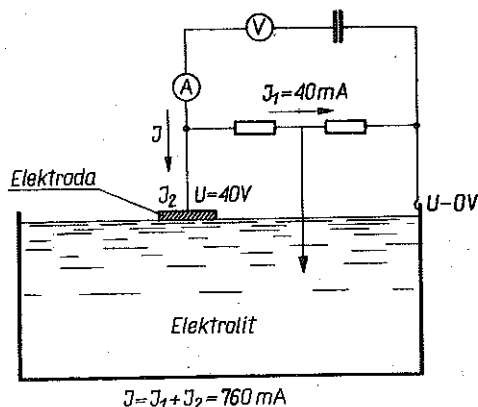
Stal mimo korozji przy zanurzeniu w wodzie nie zmniejszała swojej przewodności.

Pomiary rozkładu potencjału oraz zasilania dokonano za pomocą zasilacza wanny elektrolitycznej, przyrządu wykonanego przez wyżej wymieniony zakład. Do bezpośredniego pomiaru wartości potencjału w poszczególnych punktach służyła sonda pokazana na rys. 4. Obciążenie było realizowane przez przyłożenie napięcia do krążka o promieniu 8 cm wykonanego z blachy miedzianej. Górną powierzchnię krążka oklejono płytką z pleksiglasu dla zapobieżenia ewentualnemu kontaktowi jej powierzchni z wodą. Tak ukształtowany krążek przyłożono do powierzchni wody w wannie i doprowadzono

Rys. 3. Wanna elektrolityczna do pomiaru rozkładu funkcji Φ' 

Rys. 4. Sonda do pomiaru potencjału

do niego z zasilacza wanny elektrolitycznej prąd o napięciu 40 V. Dolna powierzchnia krążka była co pół godziny czyszczona ze względu na tworzenie się na niej warstwy śniedzi zmniejszającej przewodność prądu elektrycznego. Czyszczenie to było konieczne, gdyż w przeciwnym przypadku dla utrzymania stałego napięcia uległoby zwiększeniu natężenie prądu, co nie odpowiadałoby założeniom badania przewidującym stałe natężenie (I) i napięcie (V). Spadki napięcia mierzono sondą (rys. 4) w zaplanowanych uprzednio punktach. Siatka tych punktów jest pokazana na rys. 6 ilustrującym wyniki badań. Sonda była ustawiona prostopadle do zwierciadła wody. W kierunku poziomym była ona przesuwana za pomocą przekładni ślimakowej, a w kierunku pionowym każdorazowo odmierzone punkt jej przyłożenia z dokładnością do 0,5 mm. Sonda wykonana była z rurki szklanej wyprofilowanej tak, aby była możliwość przeprowadzenia pomiarów również pod krążkiem. Do pomiarów napięcia zastosowano przewód miedziany o platynowej końcówce 0,1 mm, która wystawała z rurki około 0,2 mm. Aby woda nie dostała się do rurki zanurzony koniec został zaślepiony żywicą epoksydową. Schemat elektryczny urządzenia badawczego pokazano na rys. 5.



Rys. 5. Schemat elektryczny modelu do pomiaru funkcji potencjału

Pomiar napięcia w wodzie wykonano na zasilaczu wanny elektrolitycznej, uzyskując wielkości napięcia jako wartość bezwzględną z dokładnością odczytu 0,01%.

4. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ

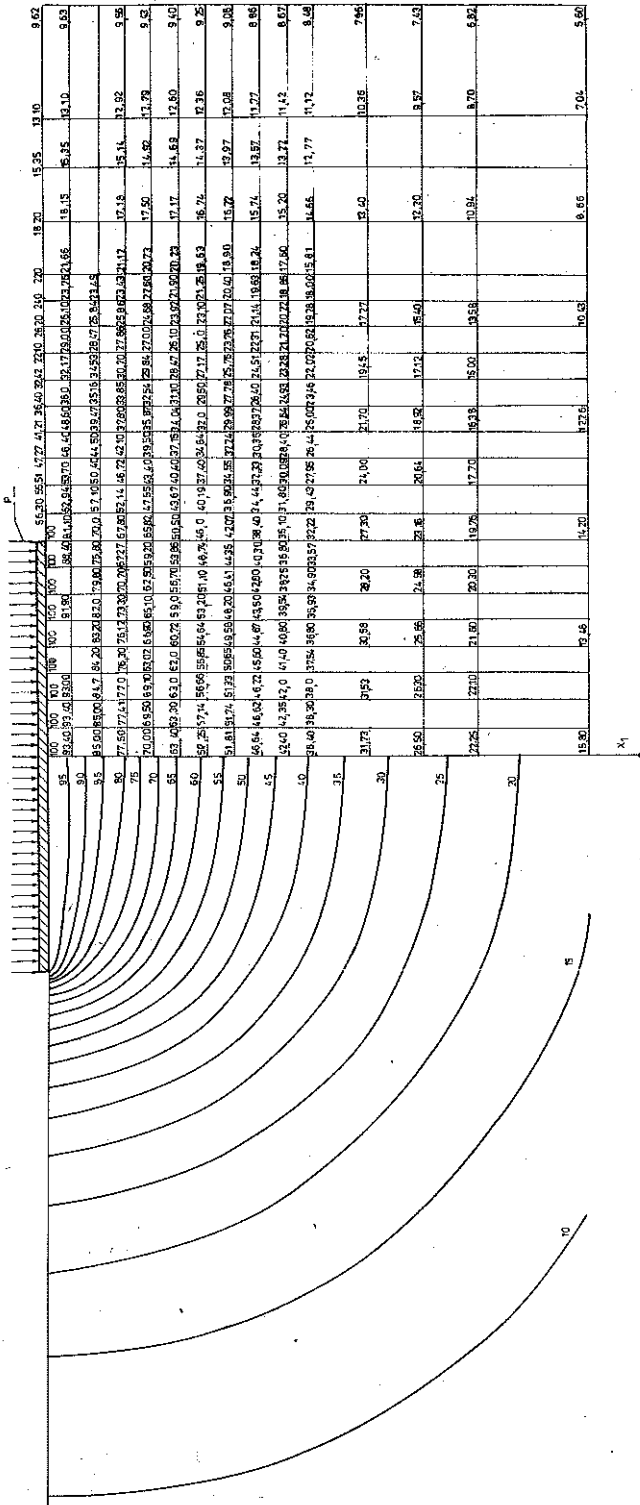
Wyznaczony rozkład funkcji potencjału i jej wartości w półprzestrzeni sprężystej jak i powierzchni stałego potencjału pokazano na rys. 6. Powierzchnię stałego potencjału wykreślono przy spadku co 5%. Na rys. 7 pokazano zmianę funkcji potencjału na osi x_1 wzdłuż jej kierunku. Linią przerywaną zaznaczono wyniki z rozwiązań teoretycznych a ciągłą wyniki uzyskane z badań.

Funkcja rozkładu potencjału w elektrolicie wywołana napięciem przyłożonym na powierzchni posłużyła do wyznaczenia przemieszczeń i naprężeń w półprzestrzeni sprężystej dla danego schematu obciążenia. Na podstawie bowiem rozważań podanych w punkcie 2 niniejszej pracy można napisać, że rozkład funkcji potencjału wyrazi się według prawidła

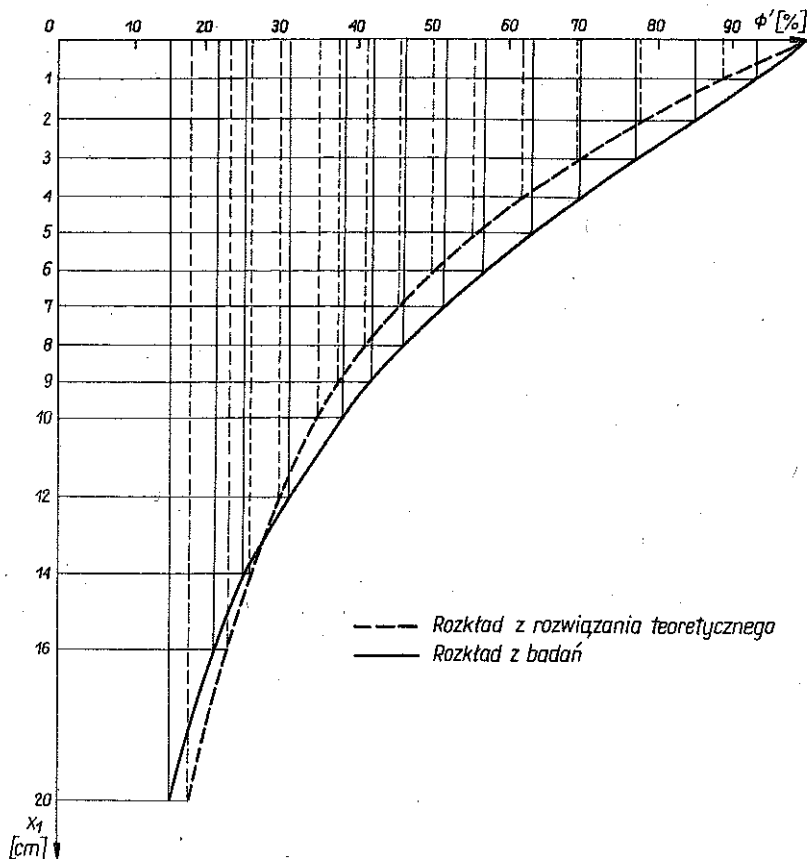
$$(4.1) \quad \Phi = k\Phi',$$

gdzie Φ oznacza rozkład funkcji potencjału w półprzestrzeni sprężystej od przyłożonego obciążenia, Φ' rozkład funkcji potencjału w elektrolicie wywołany napięciem przyłożonym na powierzchni elektrolicy oraz k stały współczynnik przeliczeniowy.

Żeby skorzystać ze wzorów (2.1), należy wprowadzić zamiast funkcji Φ funkcję $k\Phi'$, całki zamienić na sumy, a zamiast różniczek przyjąć różnice skończone. Wystarczającym warunkiem dla wyznaczenia stałego współczyn-



Rys. 6. Rozkład potencjału w elektrolicie i powierzchnie stałego potencjału



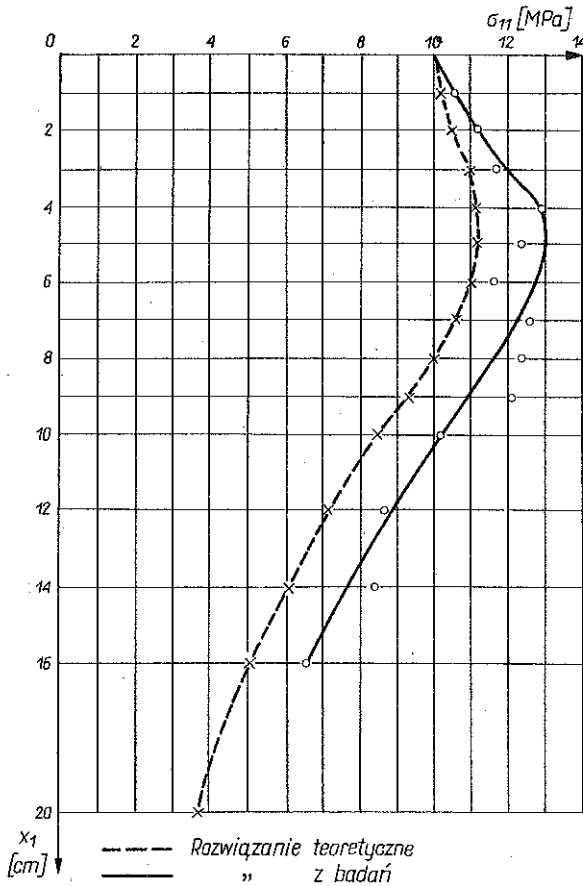
Rys. 7. Rozkład zmiany potencjału wzdłuż osi x_1

nika k jest znajomość wartości przemieszczenia u_1 pod sztywnym krążkiem (stemplem), które dla $x_1 = 0$ równa się napięciu przyłożonemu pod tym krążkiem [5].

5. PRZYKŁAD PRAKTYCZNY

Rozpatrujemy sztywny krążek (stempel) o promieniu $r = 8$ cm spoczywający na powierzchni półprzestrzeni sprężystej obciążony siłą $P = 400$ kN. Półprzestrzeń charakteryzuje się parametrami stali: moduł sprężystości podłużnej Younga $E = 2,1 \cdot 10^8$ kPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$ oraz moduł sprężystości postaciowej $G = E/[2(1 + \nu)] = 8,1 \cdot 10^7$ kPa.

Stały współczynnik przeliczeniowy k wyznacza się przy wykorzystaniu wzoru (4.1) i warunku brzegowego dla $x_1 = 0$; znane jest u_1 pod krążkiem:


 Rys. 8. Wykres naprężenia normalnego σ_{11} wzdłuż osi x_1

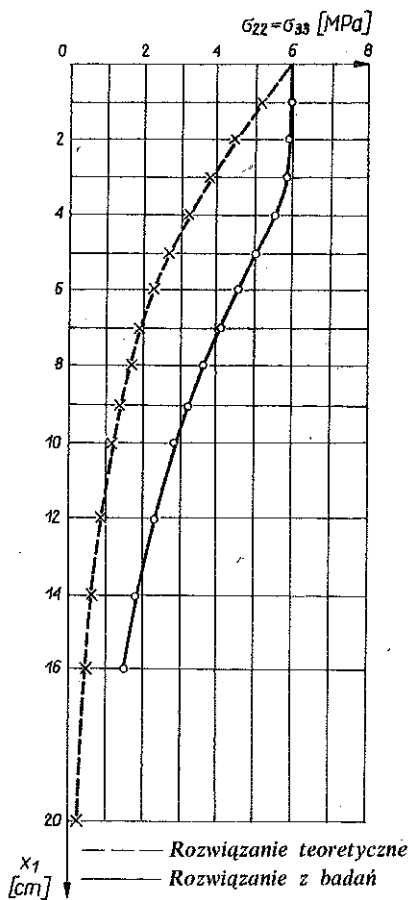
$$u_1 = k\Phi', \quad u_1 = \frac{(1-\nu)P}{4Gr}$$

Ponieważ spadki napięcia mierzono w procentach a za 100% przyjęto 1, wobec tego

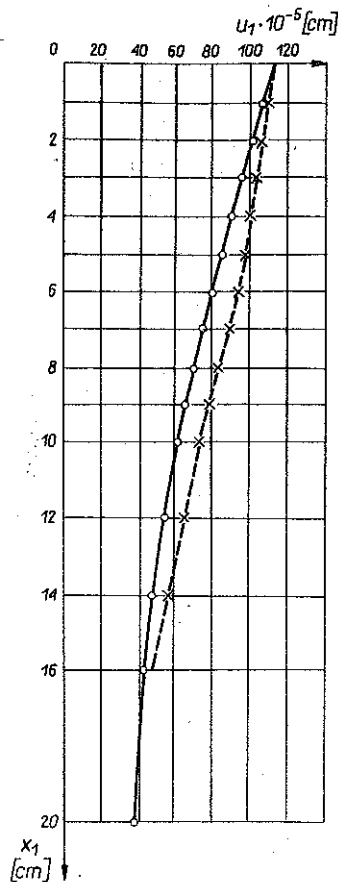
$$k\Phi' = \frac{(1-\nu)P}{4Gr},$$

stąd

$$k = \frac{(1-\nu)P}{4Gr\Phi'} = \frac{(1-0,3)400}{4 \cdot 8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,08 \cdot 1} = 108 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 108 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$



Rys. 9. Wykres naprężenia normalnego $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ wzdłuż osi x_1



Rys. 10. Wykres przemieszczeń pionowych u_1 wzdłuż osi x_1

Na rysunkach 8, 9 i 10 porównano wyniki badań z rozwiązaniami teoretycznymi.

6. WNIOSKI

Studia literatury i przeprowadzone doświadczenia laboratoryjne pozwalają na sformułowanie następujących spostrzeżeń i wniosków.

1. Wartości naprężeń i przemieszczeń wyznaczone przy wykorzystaniu analogii elektrycznej obciążone są niewątpliwie błędami wynikającymi z następujących powodów: a) niespełnienie warunków brzegowych w przedziale $\Phi = 0$ przy $R \rightarrow \infty$ (mały model), b) stosunkowo mała dokładność wyzna-

czania punktów pomiaru w cieczy oraz c) zmiana własności układu modelu podczas pracy (dysocjacja elektrolityczna, podwyższanie się temperatury elektrolitu i utlenianie się elektrod).

W ewentualnych dalszych badaniach można by stosunkowo łatwo zwiększyć dokładność badań przez przyjęcie większego zestawu badawczego (większa wanna) oraz udoskonalenie techniki wykorzystania zasilacza wanny elektrolitycznej i sondy pomiarowej.

2. Omawiana analogia elektryczna może być stosowana w zagadnieniach przestrzennych w ośrodkach jednorodnych. Wyniki badań są szczególnie przydatne do interpretacji jakościowych rozkładu naprężeń i przemieszczeń, a przy większej dokładności pomiarów mogą stanowić podstawę do technicznie dokładnej analizy ilościowej. Dotyczy to przypadków przy założeniu, że między ciałem obciążającym a obciążanym (między fundamentem a podłożem) nie ma tarcia.

3. Uwzględnienie tarcia wymaga jeszcze analizy teoretycznej i techniki modelowania. Rozwiązanie jednak tego problemu pozwoliłoby na wykorzystanie analogii elektrycznej do badań wielu zadań z praktyki inżynierskiej, trudnych do teoretycznego określenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BOUSSINESQ, *Application des potentiels a l'equilibre et du mouvement des solides elastiques*, Gauthier-Villars, Paris 1885.
2. R. L. SCHIFFMAN, B. D. AGGARWALLA, *Stresses and displacement produced in a semi-infinite elastic solid by a rigid elliptical footing*, Proc. V ICOSOMEF, t. I, 795, Paris 1961.
3. I. KISIEL, B. LYSIK, *Zarys reologii gruntów. Działanie obciążenia statycznego na grunt*, Arkady, Warszawa 1966.
4. O. DĄBROWSKI, *Analogia elektryczna przestrzennych zagadnień teorii sprężystości*, Prace Nauk. Inst. Inżyn. Łódzkiej Politechn. Wrocławskiej, seria: Studia i Materiały, nr 1, Wrocław 1970.
5. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, część I i II, PWN, Warszawa 1954.
6. Л. В. НИЩЕЦКИН, *Электромоделирование трехмерных контактных задач теории упругости*, Издательство Новочеркаского политехнического института, стр. 43, 1960.
7. W. A. GOWORKOW, *Pola elektryczne i magnetyczne*, WNT, Warszawa.
8. A. LISOWSKI, *Technika analogii elektrycznych w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1969.

РЕЗЮМЕ

ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ИЗ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Проведены исследования по возможности применения электрической аналогии для определения распределения напряжений в упругом полупространстве под нагружением

предаваемым жестким телом с ограниченной поверхностью. Исследования имели разведывательный характер в области технологической возможности исследований, точности метода и его практического применения в строительном деле.

SUMMARY

POSSIBILITIES OF APPLYING THE ELECTRICAL ANALOGY FOR SOLUTION OF CERTAIN PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

In the paper some investigations are performed on the possibility of applying the electrical analogy for determining the stress distribution in an elastic half-space under the loading transmitted through a rigid body of limited dimensions. The paper represents a reconnaissance study on the technological possibilities of the method, its accuracy and its practical applications in building engineering.

KATEDRA BUDOWY MOSTÓW
POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 listopada 1984 r.
