

ZASTOSOWANIE RACHUNKU WARIACYJNEGO DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENIA IDENTYFIKACJI I POMIARU

ANDRZEJ J. POPŁAWSKI (ŁÓDŹ)

W pracy przedstawiono założenia, a następnie procedurę symulacji eksperymentalnej układów dynamicznych o dowolnej liczbie sygnałów wejściowych i wyjściowych. Przy założeniu ruchu ustalonego omówiono procesy identyfikacji układu i rozwiązanie zadania pomiaru w dziedzinie czasu przy zastosowaniu rachunku wariacyjnego. Identyfikację oraz zadanie pomiaru przeprowadzono, opierając się na metodzie wyznaczania ekstremali przyjętych funkcjonalów, w przypadku identyfikacji metodą rozwiązania zadania izoperymetrycznego sprowadzonego do szukania ekstremum warunkowego, natomiast w przypadku zadania odwrotnego metodą szukania ekstremum zwykłego. W obu przypadkach skorzystano z równań Eulera. W celu sprawdzenia procedury przeprowadzono komputerową symulację eksperymentu na przykładzie dynamicznego układu mechanicznego.

1. WSTĘP

Badania symulacyjne są obecnie jednym z elementów pracy współczesnego konstruktora. Zazwyczaj pod pojęciem „badania symulacyjne” rozumie się badania pewnych matematycznych modeli obiektów, systemów lub procesów, prowadzone w określony sposób na maszynach cyfrowych lub analogowych. W pracy termin ten będziemy odnosić do badań eksperymentalnych, prowadzonych na obiekcie rzeczywistym, jednak nie w autentycznych jego warunkach eksploatacyjnych, lecz w laboratorium, w którym za pomocą odpowiednich urządzeń odtwarza się możliwie wiernie najważniejsze dla danych badań sytuacje, na jakie natrafia obiekt w czasie eksploatacji. Porównując badania symulacyjne komputerowe z eksperymentalnymi natrafiamy na istotne różnice merytoryczne obu zagadnień.

W symulacji komputerowej, bada się obiekt poprzez jego matematyczny model i ma się na celu dokładną analizę rozpatrywanego zagadnienia lub procesu, opierając się na rozważaniach teoretycznych, prowadzonych tylko za pomocą maszyn cyfrowych lub analogowych. Zadaniem symulacyjnych badań eksperymentalnych jest przebadanie rzeczywistego obiektu, jego reakcji na warunki eksploatacji rzeczywistej, możliwie najwierniej odtworzone w laboratorium. Dogodność prowadzenia tego rodzaju badań w warunkach laboratoryjnych w porównaniu z badaniami eksploatacyjnymi lub poligonowymi jest oczywista.

Aby możliwe było przeprowadzenie eksperymentalnych badań symulacyjnych, konieczne jest sformułowanie tzw. modelu sygnałów wejściowych. Wiadomo, że każdy obiekt podczas eksploatacji rzeczywistej poddawany jest tak różnorodnym obciążeniom, których wszystkich w badaniach teoretycznych ani eksperymentalnych nie jesteśmy w stanie uwzględnić, że konieczne jest stworzenie pewnej idealizacji tych oddziaływań lub inaczej mówiąc formułujemy model sygnałów wejściowych. Proces tworzenia sygnałów wejściowych, w celu przeprowadzenia eksperymentalnych badań symulacyjnych, nazywa się symulacją eksperymentalną. Ogólny schemat blokowy symulacji eksperymentalnej, na podstawie sygnałów wyjściowych, przedstawiono na rys. 1.

Do obiektu wprowadzone zostają pewne sygnały wejściowe $x_k(t)$, w efekcie których otrzymuje się sygnały wyjściowe $y_i(t)$. Na podstawie sygnałów $x_k(t)$ oraz $y_i(t)$ przeprowadza się identyfikację obiektu, a następnie rozwiązując zagadnienie odwrotne otrzymujemy nowe sygnały wejściowe $x_k(t)$. Procedura prowadzona jest iteracyjnie tak długo, aż osiągnięta zostanie wymagana zgodność sygnałów $y_i(t)$ oraz $y_i^*(t)$, według przyjętego kryterium zgodności.

Zagadnienia identyfikacji oraz pomiaru w omówionej procedurze symulacyjnej przeprowadzane są w dziedzinie częstości [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 i 12], co stwarza pewne ograniczenia oraz niedogodności.

Główną wadą stosowania metod częstościowych jest konieczność równej liczby sygnałów wejściowych i wyjściowych. W przypadku niespełnienia tego warunku zagadnienia identyfikacji oraz pomiaru stają się nierozwiązywalne tymi metodami. Identyfikacja badanego obiektu, mająca miejsce w czasie każdej kolejnej iteracji, polega na wyznaczeniu odpowiedzi impulsowych (transmitancji), a co za tym idzie wymaga każdorazowej linearyzacji badanego obiektu.

Przed uruchomieniem rzeczywistej symulacji eksperymentalnej konieczne jest sprawdzenie skuteczności opracowanej procedury (zakresu jej działania, zbieżności itd.). W tym celu przeprowadza się tzw. komputerową symulację eksperymentu. Symulacja ta polega na zastąpieniu w symulacji eksperymentalnej rzeczywistego obiektu jego modelem matematycznym, przyjmując jako wynik eksperymentu przybliżone, numeryczne lub analogowe rozwiązanie dynamicznych równań ruchu badanego układu.

W pracy tej podjęto próbę opracowania procedury symulacyjnej pozwalającej na badanie eksperymentalne obiektów dynamicznych o różnych liczbach sygnałów wejściowych i wyjściowych. Proponowana metoda opiera się na zastosowaniu do rozwiązywania zagadnień identyfikacji i pomiaru rachunku wariacyjnego.

Wszystkie operacje matematyczne występujące w opracowanej procedurze przeprowadzane są w przedziale czasu. Metoda ta pozwala przede wszystkim na otrzymywanie rozwiązań również w przedziale czasu, a nie rozwiązań mających dokładne tylko niektóre charakterystyki częstościowe w stosunku

do sygnałów rzeczywistych; znacznie skraca ona czas obliczeń na maszynie cyfrowej, co w przypadku układów skomplikowanych o dużych liczbach sygnałów wejściowych i wyjściowych nie jest bez znaczenia. Możliwość uwzględnienia dowolnych liczb sygnałów wejściowych i wyjściowych stwarza duże możliwości w zakresie identyfikacji obiektów dynamicznych.

Zanim przejdziemy do omawiania procedur rozwiązywania zagadnień identyfikacji i pomiaru, trzeba powiedzieć kilka słów o założeniach które zostały narzucone przez samą procedurę symulacji.

W przypadku liniowości badanego obiektu procedura symulacji ogranicza się do jednej iteracji, która kończąc się rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego daje poszukiwane sygnały wejściowe. Obiekty dynamiczne, poddawane badaniom symulacyjnym są w większości nieliniowe, nie istnieje więc w odniesieniu do nich pojęcie przepustowości ani transmitancji. Stąd też procedura przyjęta w symulacji jest procedurą iteracyjną, gdzie w czasie każdej iteracji przeprowadza się kolejne identyfikacje, które są jednym z etapów (metoda kolejnych przybliżeń) na drodze do uzyskania poszukiwanych sygnałów wejściowych.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA DO SYMULACJI UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z ZASTOSOWANIEM RACHUNKU WARIACYJNEGO

Mimo iż wszystkie rozważania w tej pracy dotyczą układów mechanicznych, proponowana procedura symulacji może być stosowana do różnych układów dynamicznych (elektrycznych, elektromechanicznych i in.), jeśli spełnione są następujące podstawowe założenia:

1) Układ dynamiczny rozpatrywany jest w stanie ruchu ustalonego, tzn. ruchu odpowiadającego chwilom na tyle odległym od chwili początkowej i końcowej, że nie występują dodatkowe zaburzenia ruchu wynikające z ruchu układu oraz jego hamowania.

2) Sygnały wejściowe $x_k(t)$ do układu nie mogą posiadać wartości równych zeru:

$$(2.1) \quad |x_k(t)| > 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, n \quad \text{oraz} \quad t \in [0, T].$$

warunek ten wynika z konieczności przedstawienia funkcji wyjścia układu w postaci

$$(2.2) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^T h_{ik}(t-\tau) x_k(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n g_{ik}(t) x_k(t),$$

gdzie $h_{ik}(t)$ są odpowiedziami impulsowymi układu; funkcje $g_{ik}(t)$ nazwiemy funkcjami przenoszenia układu. Zerowanie się któregośkolwiek z sygnałów $x_k(t)$ uniemożliwia przeprowadzenie pełnej identyfikacji obiektu.

3) Sygnały wyjściowe nie mogą być jednocześnie równe zeru:

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^m y_i^2(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Warunek ten wypływa bezpośrednio z warunku (2.1) oraz z metody rozwiązania zagadnienia pomiaru (odwrotnego) i niespełnienie go pociąga za sobą niespełnienie warunku (2.1).

4) Badany układ dynamiczny musi posiadać liczbę sygnałów wyjściowych nie mniejszą niż jeden, czyli $i \geq 2$. Warunek ten jest następstwem metody rozwiązania zadania pomiaru i wynika z analizy układu równań (4.3).

Mamy pełną świadomość przyjętych założeń wynikających z procedury symulacji oraz faktu, że każdy nieliniowy układ dynamiczny traktowany jest jako liniowy w czasie identyfikacji (iteracyjna metoda kolejnych przybliżeń). Przejdźmy do omawiania realizacji zagadnień identyfikacji i pomiaru.

3. IDENTYFIKACJA OBIEKTU

Celem identyfikacji badanego obiektu jest wyznaczenie jego funkcji przenoszenia $g_{ik}(t)$. Załóżmy zatem, że znane są sygnały wejściowe $x_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ oraz sygnały wyjściowe $y_i(t)$, $i = 1, \dots, m$. Zbudujmy funkcjonal w postaci:

$$(3.1) \quad Q_s [g_{ik}(t)] = \int_0^T \sum_{i=1}^m \left\{ \left[\sum_{k=1}^n g_{ik}(t) x_k(t) - y_i(t) \right]^2 \right\} dt = \int_0^T H [g_{ik}(t)] dt.$$

Zadaniem naszym jest wyznaczenie funkcji $g_{ik}(t)$ takich, dla których przyjęty funkcjonal $Q_s [g_{ik}(t)]$ osiąga minimum, czyli wyznaczenie ekstremali, które jak wiadomo dla tego funkcjonału istnieją [9]. Poszukiwanie ekstremum zwykłego nie daje pożądanych efektów i prowadzi do otrzymywania nieoznaczonych układów równań algebraicznych, rozwiązano więc zadanie izoperymetryczne przy następującym warunku:

$$(3.2) \quad \int_0^T [g_{ik}(t) x_k(t) - y_i(t)]^2 dt = \int_0^T P_{ik} [g_{ik}(t)] dt = \varepsilon_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \\ k = 1, \dots, n,$$

gdzie parametry ε_{ik} są małe w stosunku do wartości występujących w równaniu (3.2), ich wartości przyjmujemy rzędu $10^{-3} \max \{x_{\max}(t), y_{\max}(t)\}$ i stanowią o dokładności prowadzonej identyfikacji obiektu oraz spełniać muszą warunki

$$(3.3) \quad \varepsilon_{ik} > 0, \quad \varepsilon_{ik} \neq \varepsilon_{js} \quad \text{dla} \quad i \neq j \quad \text{oraz} \quad k \neq s.$$

Mając warunek izoperymetryczny i wprowadzając funkcjonal pomocniczy (3.4), sprowadzamy zadanie izoperymetryczne do zadania na ekstremum warunkowe

$$(3.4) \quad Q_s [g_{ik}(t)] = \int_0^T \{H [g_{ik}(t)] + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} p_{ik} [g_{ik}(t)]\} dt = \int_0^T I [g_{ik}(t)] dt,$$

gdzie

$$(3.5) \quad I [g_{ik}(t)] = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^n g_{ik}(t) x_k(t) - y_i(t) \right]^2 + \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} [g_{ik}(t) x_k(t) - y_i(t)]^2.$$

Warunki parametrów λ_{ik} wyznaczone są na podstawie warunku izoperymetrycznego (3.2).

Równania Eulera, dla funkcjonału pomocniczego (3.4), przyjmują postać

$$(3.6) \quad \frac{\partial}{\partial g_{ik}(t)} I [g_{ik}(t)] - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{g}_{ik}(t)} I [g_{ik}(t)] \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ k = 1, \dots, n.$$

Wstawiając do równania (3.6) wyrażenie (3.5) oraz przeprowadzając obliczenia, otrzymuje się układ równań

$$(3.7) \quad g_{ij}(t) x_j(t) (\lambda_{ij} + 1) + \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}(t) x_k(t) + \sum_{k=j+1}^n g_{ik}(t) x_k(t) = y_i(t) (\lambda_{ij} + 1), \\ j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Rozwiązując układ równań (3.7) względem nieznanymi funkcji $g_{ij}(t)$, otrzymuje się poszukiwane funkcje przenoszenia. Znając $g_{ij}(t)$, przejść można do rozwiązania zagadnienia odwrotnego (pomiaru).

4. ZAGADNIENIE ODWROTNE

Celem rozwiązania zagadnienia odwrotnego (pomiaru) jest wyznaczenie sygnału wejściowego $x_k(t)$, mając dane funkcje przenoszenia obiektu oraz sygnał wyjściowy $y_i(t)$. Do celów symulacyjnych jako sygnał wyjściowy przyjmuje się sygnał rzeczywisty $y_i^*(t)$, pomierzony w trakcie eksploatacyjnych badań obiektu w jego rzeczywistych warunkach pracy.

Znając zatem funkcje $g_{ik}(t)$ oraz $y_i^*(t)$ budujemy funkcjonal w postaci (3.1), traktując jako zmienną (ekstremalę) funkcję $x_k(t)$;

$$(4.1) \quad Q_s [x_k(t)] = \int_0^T \sum_{i=1}^m \left\{ \left[\sum_{k=1}^n g_{ik}(t) x_k(t) - y_i^*(t) \right]^2 \right\} dt = \int_0^T F [x_k(t)] dt.$$

Szukając ekstremali $x_k(t)$, dla których funkcjonal (4.1) osiąga minimum, korzystamy z równań Eulera [9] w postaci

$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_k(t)} F[x_k(t)] = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

W efekcie otrzymujemy układ n równań

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^m \{g_{ip}(t) [\sum_{k=1}^n g_{ik}(t) x_k(t) - y_i^*(t)]\} = 0, \quad p = 1, \dots, n,$$

pozwalający na wyznaczenie n niewiadomych sygnałów $x_k(t)$, które są nowo-wygenerowanymi sygnałami wejściowymi do badanego obiektu w następnym kroku iteracyjnym symulacji eksperymentalnej.

Procedura iteracyjna prowadzona jest tak długo, aż sygnały wyjściowe z obiektu $y_i(t)$ będą odpowiednio bliskie sygnałom rzeczywistym $y_i^*(t)$ (zgodnie z przyjętym kryterium zgodności).

Zagadnienie pomiaru przeprowadzić można również w nieco inny sposób. Wyznaczając w czasie każdej iteracji uchyb sygnału wyjściowego

$$(4.4) \quad \Delta y_i(t) = y_i^*(t) - y_i(t), \quad t \in [0, T],$$

funkcjonal buduje się w postaci

$$(4.5) \quad Q_s[\Delta x_k(t)] = \int_0^T \sum_{i=1}^m \left\{ \left[\sum_{k=1}^n g_{ik}(t) \Delta x_k(t) - \Delta y_i(t) \right]^2 \right\} dt.$$

Postępując tak samo jak w przypadku poprzednim, dochodzimy do układu równań

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^m \{g_{ij}(t) [\sum_{k=1}^n g_{ik}(t) \Delta x_k(t) - \Delta y_i(t)]\} = 0,$$

z którego wyznaczamy nieznane $\Delta x_k(t)$. Nowo-wygenerowany sygnał wejściowy jest więc postaci (w $p+1$ iteracji)

$$(4.7) \quad [x_k(t)]_{p+1} = [x_k(t)]_p + \Delta x_k(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Procedura iteracyjna prowadzona jest tak długo, aż uchyby $\Delta x_k(t)$ będą odpowiednio bliskie zeru:

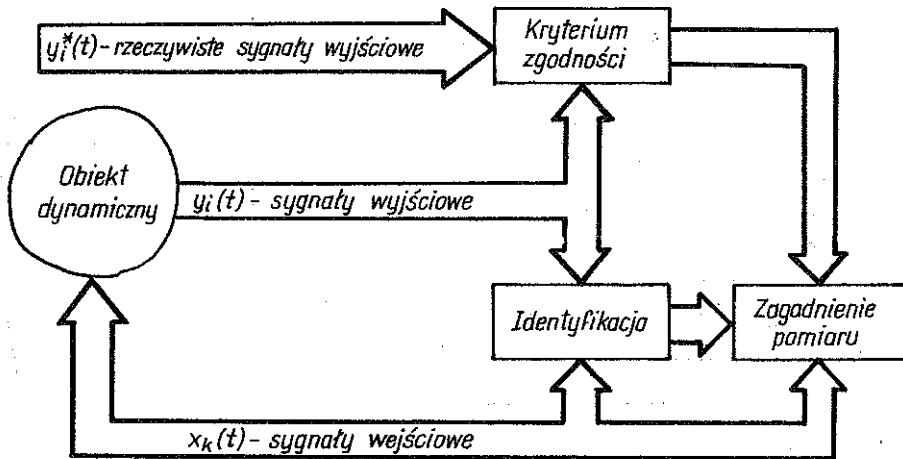
$$(4.8) \quad \Delta x_k(t) \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Kończąc omawianie metod rozwiązywania zagadnienia pomiaru, należy poświęcić kilka słów zagadnieniu zbieżności.

Teoretyczne udowodnienie zbieżności procedury iteracyjnej jest niemożliwe ze względu na ingerencję eksperymentu w kolejnych iteracjach. Zbieżność procedury potwierdzić może tylko wynik jej zastosowania w konkretnym przypadku.

5. PRZYKŁAD

W celu sprawdzenia proponowanej metody przeprowadzono komputerową symulację eksperymentu w sposób pokazany schematycznie na rys. 1. Jako badany obiekt przyjęto układ dynamiczny, przedstawiony na rys. 2, opisany układem nieliniowym równań różniczkowych [10]



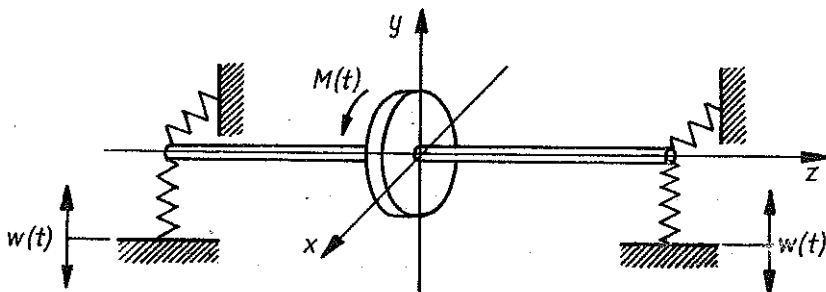
Rys. 1

$$m\ddot{w}_x + k_x w_x = -e_0 \frac{d^2}{dt^2} \cos \varphi \cdot m,$$

$$(5.1) \quad m\ddot{w}_y + k_y [w_y - w(t)] = -e_0 \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi \cdot m,$$

$$B_w \ddot{\varphi} = me_0 [\ddot{w}_x \sin \varphi - \dot{w}_y \cos \varphi] + M(t).$$

Oznaczenia do rys. 2 są następujące: e_0 oznacza promień niewyważenia tarczy wirnika, k_x , k_y sztywności zastępcze układu w kierunkach osi x i y ,



Rys. 2

$M(t)$ moment obrotowy, $w(t)$ wymuszenie kinematyczne, B_w masowy moment bezwładności tarczy względem jej geometrycznego środka, m masę wirnika.

Zakładając $\varphi(t) = \omega t + \psi(t)$ oraz przechodząc do wielkości bezwymiarowych.

$$(5.2) \quad \Gamma = \frac{w_x}{e_0}, \quad \eta = \frac{w_y}{e_0}, \quad \varepsilon = \frac{me_0^2}{B_w} \ll 1,$$

$$\Omega(t) = \frac{w(t)}{e_0}, \quad \Theta(t) = \frac{M(t)}{B_w},$$

$$\alpha_x^2 = \frac{k_x}{m}, \quad \alpha_y^2 = \frac{k_y}{m},$$

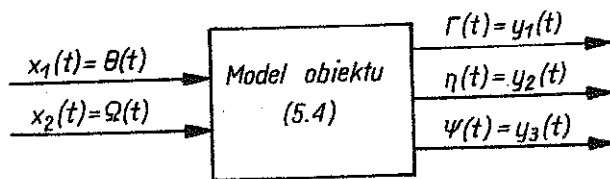
otrzymujemy, po przekształceniach algebraicznych, następujący układ równań różniczkowych:

$$(5.3) \quad \ddot{\Gamma} = \frac{d^2}{dt^2} [\sin \omega t \sin \psi(t) - \cos \omega t \cos \psi(t)] - \alpha_x^2 \Gamma,$$

$$\ddot{\eta} = \frac{d^2}{dt^2} [-\cos \omega t \sin \psi(t) - \sin \omega t \cos \psi(t)] - \alpha_y^2 [\eta - \Omega(t)],$$

$$\ddot{\psi} = \varepsilon \{ [\dot{\Gamma} \sin \psi - \dot{\eta} \cos \psi] \cos \omega t + [\dot{\Gamma} \cos \psi + \dot{\eta} \sin \psi] \sin \omega t \} + \dot{\Theta}(t),$$

Układ dynamicznych równań ruchu w formie (5.3) stanowi matematyczny model eksperymentu w komputerowej symulacji (rys. 1), jeśli przyjmiemy jako sygnały wejściowe wartości funkcji $\Theta(t)$ oraz $\Omega(t)$ a jako sygnały wyjściowe niewiadome funkcje $\Gamma(t)$, $\eta(t)$ i $\psi(t)$. Mamy więc do czynienia z układem przedstawionym na rys. 3.



Rys. 3

Mając jednoznacznie określony model matematyczny eksperymentu, przejdźmy do omówienia procedury symulacyjnej dla tego przykładu. Po wprowadzeniu sygnałów wejściowych $\Theta(t)$ oraz $\Omega(t)$ do modelu obiektu oraz po otrzymaniu sygnałów wyjściowych $\Gamma(t)$, $\eta(t)$, $\psi(t)$ (przez numeryczne rozwiązanie układu równań (5.3) metodą Rungego-Kutty), przeprowadzamy identyfikację obiektu.

Zgodnie z układem równań (3.7) otrzymujemy

$$(5.4) \quad \begin{bmatrix} x_1(\lambda_{11}+1), & x_2, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ x_1, & x_2(\lambda_{12}+1), & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & x_1(\lambda_{21}+1), & x_2, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & x_1, & x_2(\lambda_{22}+1), & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & x_1(\lambda_{31}+1), & x_2, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & x_1, & x_2(\lambda_{32}+1) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{21} \\ g_{22} \\ g_{31} \\ g_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(\lambda_{11}+1) \\ y_1(\lambda_{12}+1) \\ y_2(\lambda_{21}+1) \\ y_2(\lambda_{22}+1) \\ y_3(\lambda_{31}+1) \\ y_3(\lambda_{32}+1) \end{bmatrix},$$

Na podstawie układu (5.4) wyznaczyć można funkcje przenoszenia $g_{ik}(t)$, gdzie parametry λ_{ik} wyznaczone są przez warunki izoperymetryczne (3.2), które w omawianym przykładzie wyrażają się układem równań algebraicznych:

$$(5.5) \quad \lambda_{ij} + \frac{\varepsilon_{ij}}{\int_0^T y_i^2(t) dt} (\lambda_{ij} \lambda_{ii} + \lambda_{ij} + \lambda_{ii}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

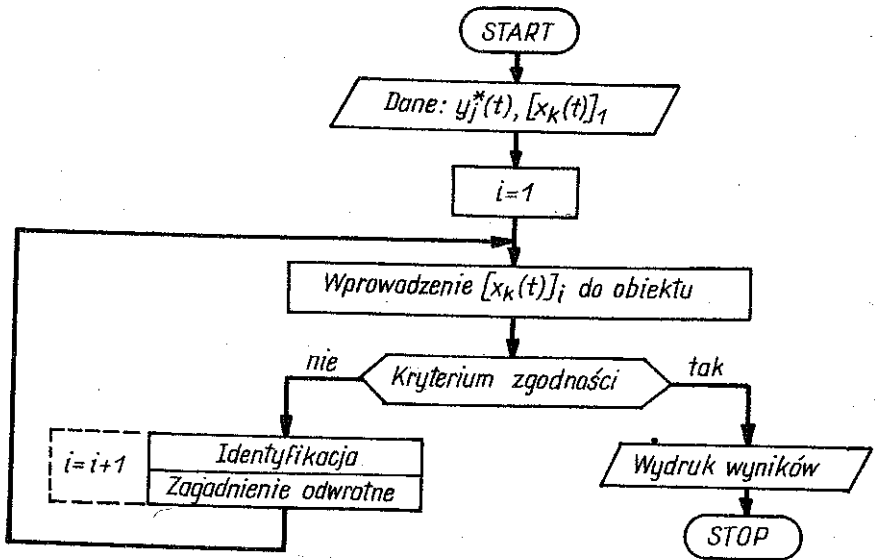
Znając funkcje przenoszenia $g_{ik}(t)$ oraz znając rzeczywiste odpowiedzi $y_i^*(t)$ układu, rozwiązujemy zadanie odwrotne korzystając z (4.3):

$$(5.6) \quad \begin{aligned} x_1 (g_{11}^2 + g_{21}^2 + g_{31}^2) + x_2 (g_{11} g_{12} + g_{21} g_{22} + g_{31} g_{32}) &= \\ &= g_{11} y_1^* + g_{21} y_2^* + g_{31} y_3^*, \\ x_1 (g_{11} g_{12} + g_{21} g_{22} + g_{31} g_{32}) + x_2 (g_{12}^2 + g_{22}^2 + g_{32}^2) &= \\ &= g_{12} y_1^* + g_{22} y_2^* + g_{32} y_3^*, \end{aligned}$$

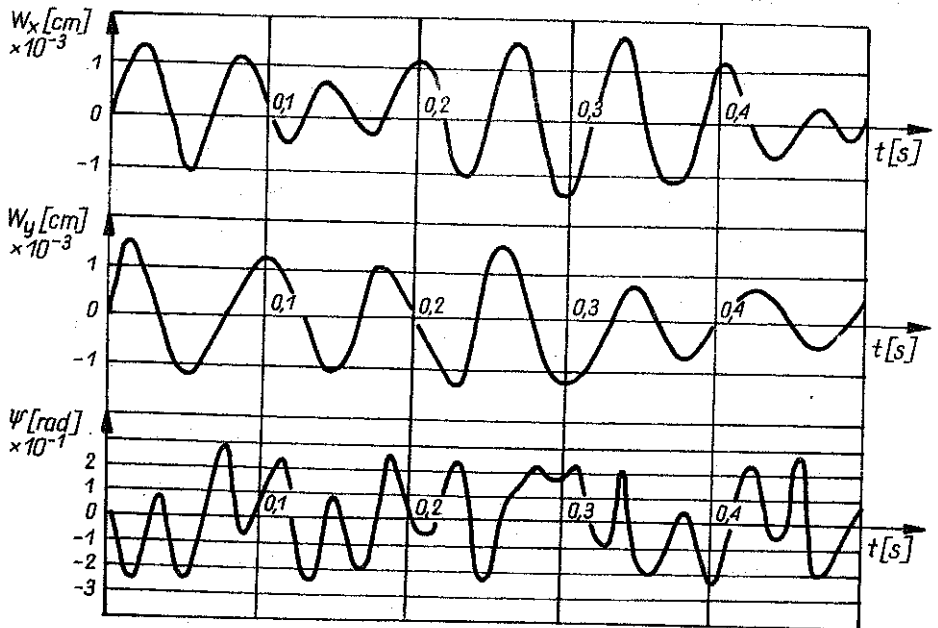
z którego wyznaczamy nieznanne sygnały wejściowe $x_1(t) = \Theta(t)$ oraz $x_2(t) = \Omega(t)$.

Schemat blokowy komputerowej symulacji eksperymentu pokazan na rys. 4. Kryterium zgodności przyjęto w postaci

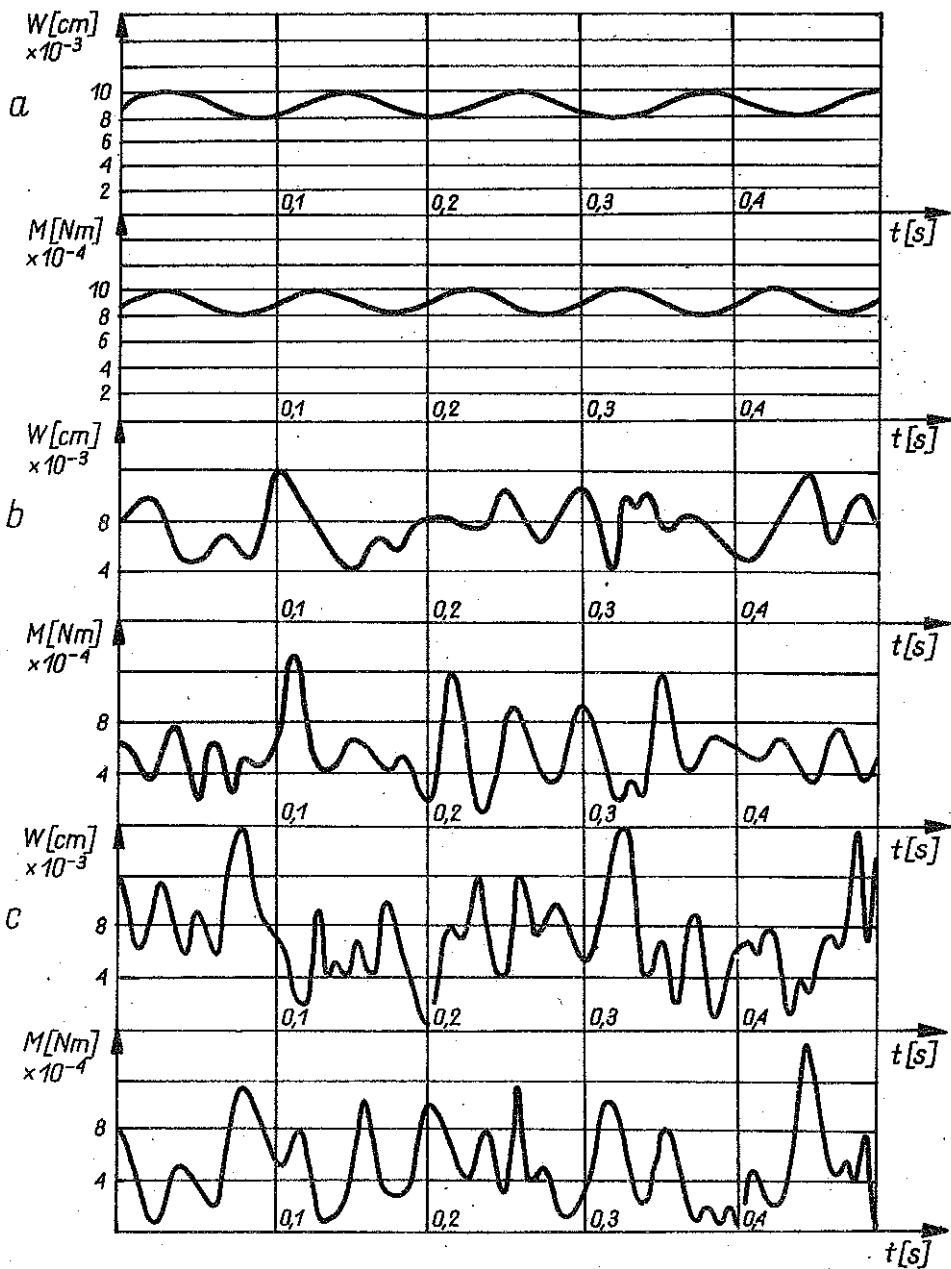
$$(5.7) \quad \int_0^T [y_i(t) - y_i^*(t)]^2 dt \leq \delta_i.$$



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Obliczenia przeprowadzono dla następujących danych:

$$k_x = 43 \text{ N/m}, k_y = 61 \text{ N/m}, e_0 = 0,001 \text{ m}, B_w = 8 \cdot 10^{-7} \text{ kgm}^2,$$

$$m = 1 \text{ kg}, \omega = 70 \text{ s}^{-1},$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,0001 \text{ m}, \delta_3 = 0,001 \text{ m}.$$

Wymagane sygnały wyjściowe (przyjęte jako rzeczywiste) założono w postaci następujących sum funkcji harmoniczných:

$$w_x^* = 0,0001 + 0,001 \sin 100t + 0,0005 \sin 80t + 0,00025 \sin (90t + 40),$$

$$w_y^* = 0,001 \sin 80t + 0,0005 \sin 75t + 0,00025 \sin (100t + 70),$$

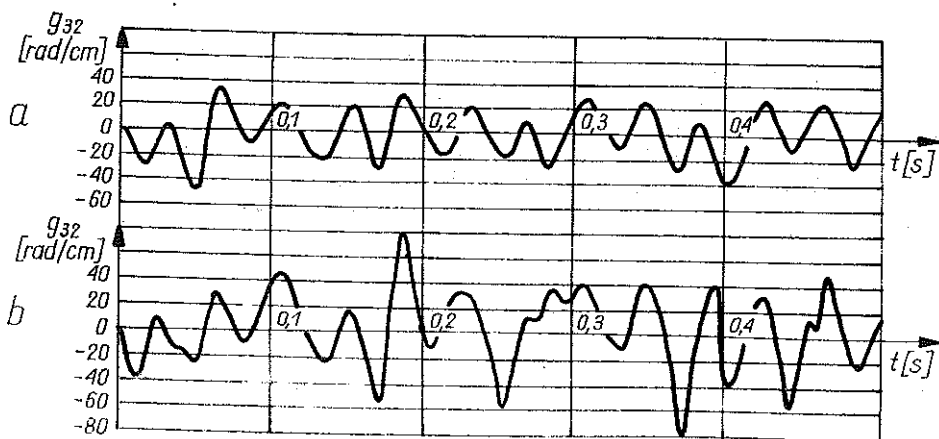
$$\psi^* = 0,1 \sin 10000t + 0,2 \sin 30000t.$$

Sygnały wejściowe wprowadzone do układu dynamicznego w pierwszej iteracji mają postać funkcji harmoniczných

$$(5.9) \quad w(t) = 0,009 + 0,001 \sin 50t,$$

$$M(t) = 0,0007 + 0,0001 \sin 70t.$$

Czas obliczeń numerycznych należy do przedziału $t \in [0; 5\text{s}]$. Krok obliczeń $\Delta t = 0,01 \text{ s}$. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono na rysunkach 5–7, w przedziale czasu $t \in [0; 0,5]$, ze względu na skomplikowany ich kształt. Rysunek 5 przedstawia wymagane (przyjęte jako rzeczywiste) sygnały wyjściowe opisane funkcjami (5.8). Rysunki 6a, b i c przedstawiają odpowiednio sygnały wejściowe do układu przyjęte w pierwszej iteracji (równania (5.9)), sygnały wejściowe otrzymane po przebiegu pierwszej iteracji, będące jednocześnie sygnałami wejściowymi do drugiej iteracji oraz sygnały wejściowe otrzymane po 11-tu iteracjach. Po 11-tej iteracji procedura symulacji została automatycznie przerwana, ze względu na otrzymanie wymaganej



Rys. 7

dokładności sygnałów wyjściowych z rzeczywistymi. Sygnały przedstawione na rys. 6c są zatem poszukiwanymi sygnałami wejściowymi do obiektu, umożliwiającymi przeprowadzenie badań w warunkach laboratoryjnych. Rys. 7a i b pokazują (przykładowo) odpowiednio funkcję przenoszenia $g_{32}(t)$ otrzymaną po pierwszej i po 11-tej (ostatniej) iteracji.

6. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona procedura symulacji układów dynamicznych z zastosowaniem rachunku wariacyjnego daje użyteczne w praktyce inżynierskiej rezultaty pod warunkiem spełnienia założeń sformułowanych w p. 2. Przyjmując, że założenia wymienione w p. 2 są spełnione oraz zakładając wymaganą dokładność pomiarów i obliczeń, można na podstawie powyższych rozważań stwierdzić:

1. Przedstawiony w pracy przykład dowodzi, że proponowana metoda symulacji eksperymentalnej z zastosowaniem rachunku wariacyjnego może prowadzić do efektywnych wyników, co świadczy o poprawności przyjętego toku postępowania. Ponadto w zastosowaniu tej procedury nie istnieje ograniczenie równej liczby sygnałów wejściowych i wyjściowych.

2. Proponowana procedura umożliwia sformułowanie algorytmu mogącego być zrealizowanym przy użyciu technik numerycznych, co umożliwia pełną automatyzację procesu symulacji eksperymentalnej. Bezpośrednio z tym wiąże się fakt przeprowadzania obliczeń i otrzymywania wyników wyłącznie w dziedzinie czasu, co znacznie skraca czas obliczeń na maszynie cyfrowej i usuwa konieczność obliczania skomplikowanych charakterystyk częstotściowych.

3. W celu stosowania procedury symulacyjnej opisanej w pracy niezbędne jest, oprócz spełnienia wymaganych założeń, pewne doświadczenie inżynierskie, ze względu na konieczność arbitralnego przyjęcia wartości liczbowych: δ_i oraz ε_{ik} , gdzie $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$.

4. Zastosowanie rachunku wariacyjnego do realizacji procedury symulacyjnej nie wprowadza ograniczenia nieustaloności ruchu układu, dlatego też wydaje się możliwe rozszerzenie proponowanej metody na układy z ruchem nieustalonym.

5. Rozważania zawarte w pracy dotyczyły głównie układów dynamicznych mechanicznych, lecz proponowana metoda stosowana być może również do symulacji eksperymentalnej innych układów dynamicznych pod warunkiem spełnienia założeń w p. 2.

Przedstawiona praca nie wyczerpuje tematyki związanej z zastosowaniem rachunku wariacyjnego w procedurach symulacji eksperymentalnej. Opisana metoda rozwiązania tego problemu jest, jak się wydaje, nowa i dotychczas niestosowana, gdyż brak jest w literaturze wyników jej stosowania do kon-

kretnych układów dynamicznych. Wraz ze wzrostem jej zastosowań napotkać można na nowe problemy związane z jej rozszerzeniem na coraz większą klasę układów dynamicznych — z zagadnieniami optymalizacji i dokładności procedury, które wymagać będą wszechstronnych opracowań.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. F. KLINGER, *Digitale Regelung von Mehrkomponenten-Betriebsfestigkeitsprüfständen für die Automobilindustrie*, ATZ, Automobiltechnische Zeitschrift, Heft 9, 1980.
2. T. GROMADOWSKI, J. OSIECKI, B. STĘPIŃSKI, *System dla symulacyjnych badań przegubów krzyżakowych, wałów przegubowych*, Opracowanie Problemowe PIMOT, Warszawa 1981.
3. B. W. CRYER, P. E. NAWROCKI, R. A. LUND, *A road simulation system for heavy duty vehicles*, Automotive Engineering Congress and Exposition Detroit, Michigan, Feb. 23—27, 1976.
4. C. J. DODDS, J. D. ROBSON, *Simulation of dynamic stresses in vehicles and components*, Congress: Dynamics of Vehicles on Roads and Railway Tracks, Amsterdam 1976.
5. L. J. HOWELL, *Stochastic analysis of cumulative vehicle loading*, Congress: Dynamics of Vehicles on Roads and Railway Tracks, Amsterdam 1976.
6. H. R. JAECKEL, *Simulation, duplication and synthesis of fatigue load histories*, SAE Transactions, 79, 1979.
7. B. K. BARROWCLIFF, *Full scale road simulated endurance test*, Automotive Engineering Congress, Detroit, Michigan, Jan. 8—12, 1968.
8. G. DODLBACHER, J. RERICHA, *Anwendung der Modalanalyse in Fahrzeugbau*, ATZ Automobiltechnische Zeitschrift, Heft 82, 1980.
9. E. ELSGOLC, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.
10. A. POPLAWSKI, *Kritische und Subkritische Drehzahlen eines Laval-Laufers infolge Lageranisotropie*, Eigengewicht und Drehmomentschwankungen, Zesz. Nauk. PŁ, 82.
11. G. JACOBY, *Prüfung im Automobilbau*, Konferenz: Prüfung von Werkstoffen und Maschinenbauteilen mittels Programmierbaren Elektrohydraulischer Prüfmaschinen, Praha 28—30, 11, 1984.
12. H. SCHENK, *Prüfung und Simulation im Eisenbahnwesen*, Konferenz: Prüfung von Werkstoffen und Maschinenbauteilen mittels Programmierbarer Elektrohydraulischer Prüfmaschinen, Praha 28—30, 11, 84.

РЕЗЮМЕ

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ИЗМЕРЕНИЯ

В работе представлены предположения, а затем процедура экспериментальной имитации динамических систем с произвольным количеством входных и выходных сигналов. Предполагая установившееся движение, обсуждены процессы идентификации системы и решение задачи измерения в области времени, при применении вариационного исчисления. Идентификация и задача измерения проведены, опираясь на методы определения экстремалей принятых функционалов, в случае идентификации методом решения изопериметрической задачи, сведенной к поиску условного экстремума, в случае же обратной

задачи методом поиска обыкновенного экстремума. В обоих случаях использованы уравнения Эйлера. С целью проверки процедуры проведена численная имитация эксперимента на примере динамической механической системы.

SUMMARY

APPLICATION OF VARIATIONAL CALCULUS TO THE SOLUTIONS OF IDENTIFICATION AND MEASUREMENT PROBLEMS

The paper presents the assumptions and the experimental simulation method for dynamical systems with arbitrary number of input and output signals. Under the assumption of stationary motion, the processes of identification and measurements in the time domain are analyzed by means of the variational calculus techniques. Identification and measurements are performed using the method of determining the functional extrema; in case of identification, the method is based on solving the isoperimetric problem reduced to the conditional extremum condition; in case of the inverse problem, the usual extremum must be sought for. In both the cases, Euler equations are used. In order to verify the procedure, computer simulation of the experiment is applied to a case of dynamic system.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ, ŁÓDŹ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1986 r.