

## WSTĘPNE MODELOWANIE NUMERYCZNE DYNAMIKI NIESPRĘŻYSTYCH MEMBRAN KOŁOWYCH

WŁODZIMIERZ I D C Z A K (WARSZAWA)

Przedstawiono numeryczne modelowanie dynamiki niesprężystej membrany kołowej utwierdzonej na obwodzie, której źródłem obciążenia jest detonacja materiału wybuchowego. Opierając się na uproszczonej teorii umiarkowanie dużych ugięć i dopuszczając możliwość zmiany grubości membrany, wprowadzono nieliniowe różniczkowe równanie ruchu, które rozwiązano metodą różnic skończonych. W ramach rozważanej teorii badano czasowo-przestrzenne zmiany funkcji ugięcia, prędkości ugięcia, odkształcenia i grubości membrany. Przedyskutowano wpływ osłabienia membrany związane z zmniejszaniem się jej grubości, wzmocnienia materiałowego oraz postaci warunku początkowego na proces ruchu membrany. Wykazano konieczność uwzględnienia również wzmocnienia geometrycznego. Przedstawiono wniosek o możliwości wykorzystania badanych membran w mechanicznych czujnikach ciśnienia do pomiaru zarówno amplitudy ciśnienia jak i czasu jego trwania.

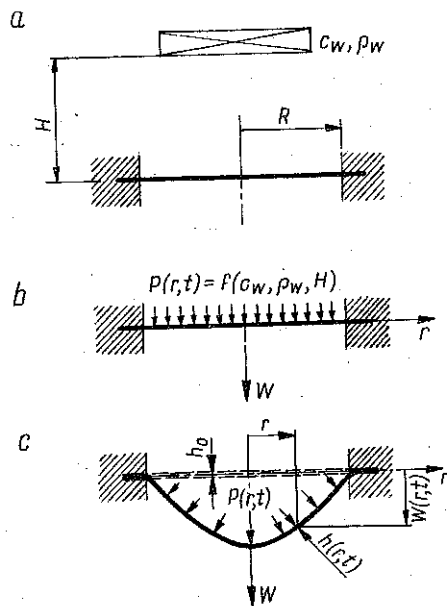
### 1. WSTĘP

Zagadnienie dynamiki cienkich płyt kołowych, w przypadku gdy źródłem obciążenia jest detonacja kontaktowego lub niekontaktowego ładunku materiału wybuchowego posiada znaczenie natury poznawczej i praktycznej.

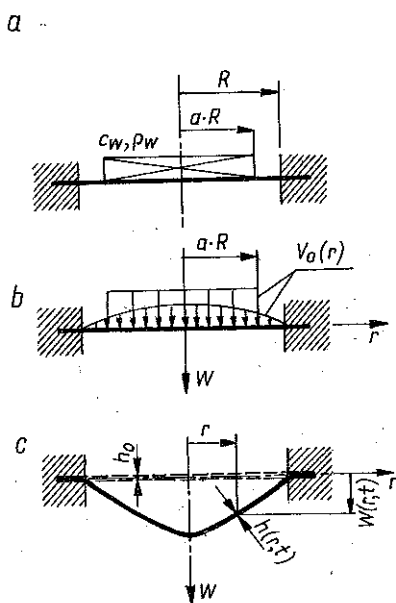
Metody przybliżone typu inżynierskiego nie dają możliwości jakościowego badania procesu deformacji konstrukcji. Zadania takie spełniają metody numerycznego modelowania, umożliwiające symulację badanych procesów.

W pracy przedstawiono wstępne, a więc obarczone pewnymi założeniami upraszczającymi, modelowanie dynamiki niesprężystych membran obciążanych falą ciśnienia o dużej intensywności lub idealnym impulsem początkowym. Proponowany model zawiera następujące części: 1) analityczne sformułowanie rozważanego zagadnienia, 2) metodę rozwiązania, 3) algorytm rozwiązania, 4) program w języku Fortran na komputer.

Termin „wstępne modelowanie numeryczne” przyjęto z tego względu, że w fazie formułowania równań dynamiki umiarkowanie dużych ugięć membrany pominięto oddziaływanie wzdłużne ograniczając się jedynie do spełniania warunków równowagi sił poprzecznych. Założono ponadto, że siły membranowe  $N_r$  nie są funkcją współrzędnej przestrzennej  $r$ . Tego typu założenia pozwalają śledzić proces deformacji membrany z pominięciem



Rys. 1



Rys. 2

wzmocnienia geometrycznego. Dzięki temu możliwe jest ustosunkowanie się do pozostałych efektów, które w procesach dynamicznych odgrywają istotną rolę. Efekty te, to 1) osłabienie membrany związane ze zmniejszaniem się jej grubości, 2) wzmocnienie materiałowe charakteryzujące wrażliwość materiału na prędkość deformacji oraz 3) wpływ postaci warunku początkowego na proces ruchu.

Rozważaną membranę obciążoną falą ciśnienia  $P(r, t)$ , której źródłem jest niekontaktowy ładunek materiału wybuchowego o gęstości  $\rho_w$  i ciężarze  $c_w$  detonujący w odległości  $H$  od membrany przedstawiono na rys. 1. Na rys. 2 przedstawiono membranę, której źródłem obciążenia jest kontaktowy ładunek materiału wybuchowego o parametrach  $\rho_w$  i  $c_w$  rozmieszczony centralnie na membranie w strefie o promieniu  $a$ , generujący idealny impuls początkowy  $I$ .

Rozwiązując zagadnienie sformułowane w punkcie drugim zastosowano metodę różnic skończonych z iteracjami i niejawnym schematem całkowania równania ruchu względem czasu [8]. Problem stabilności i zbieżności metody numerycznej zastosowanej do rozwiązania zagadnienia dynamiki niesprężystych membran kołowych omówiono szczegółowo w [9].

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważamy zamocowaną na obwodzie kołową membranę o promieniu  $R$ , grubości początkowej  $h_0$  i gęstości powierzchniowej materiału  $m$ . Membrana obciążona jest falą ciśnienia o amplitudzie  $P_0$  i czasie trwania  $t_0$  lub idealnym impulsem początkowym  $I$  rozłożonym równomiernie i symetrycznie wokół jej punktu środkowego na powierzchni o promieniu  $aR$ , gdzie  $0 < a \leq 1$  (rys. 2).

Rozpatrując równowagę nieskończenie małego elementu odkształconej membrany we współrzędnych biegunowych otrzymuje się następujący układ równań różniczkowych [10]:

$$(2.1) \quad \frac{d}{dr} \left( rN_r \frac{dW}{dr} \right) + rP(r, t) - rm \frac{\partial^2 W(r, t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{d}{dr} (rN_r) - N_\theta - rm \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Sily membranowe w kierunku promieniowym i obwodowym oznaczono odpowiednio  $N_r$ ,  $N_\theta$  oraz przemieszczenia poprzeczne i wzdłużne promieniowe odpowiednio  $W$ ,  $U$ . Pominięcie przemieszczeń w kierunku promieniowym, co prowadzi do wyników zadowalających z inżynierskiego punktu widzenia [5] i przyjęcie  $U = 0$  pozwala sprowadzić układ (2.1) do równania

$$(2.2) \quad \frac{d}{dr} (rN_r) \frac{dW}{dr} + rN_r \frac{d^2 W}{dr^2} + r \left[ P(r, t) - m \frac{\partial^2 W(r, t)}{\partial t^2} \right] = 0.$$

W rozpatrywanym przypadku umiarkowanie dużych przemieszczeń związku geometryczne określające odkształcenia podłużne i ich prędkości, jako funkcje przemieszczeń, są następujące [11]:

$$(2.3) \quad \lambda_r = \frac{dU}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2, \quad \lambda_\theta = \frac{U}{r},$$

$$\lambda_r = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t}, \quad \lambda_\theta = 0.$$

Przy wyznaczaniu prędkości odkształceń przyjęto  $U = 0$ .

Wprowadzając do równań (2.2) oraz (2.3) zmienne bezwymiarowe w postaci

$$(2.4) \quad w = \frac{W}{h_0}, \quad h = \frac{h}{h_0}, \quad \varrho = \frac{r}{R}, \quad \sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad p = P \frac{R}{\sigma_0 h_0},$$

$$\tau = \frac{t}{t_f} \quad \text{lub} \quad \tau = \frac{tV_0}{h_0},$$

gdzie  $\sigma_r = N_r/h$ ,  $\sigma_0$  oznacza granicę plastyczności na rozciąganie,  $t_f$  czas trwania ruchu sztywno-lepkoplastycznej membrany obciążonej falą ciśnienia oraz  $V_0$  początkową wartość prędkości przemieszczenia przyłożoną do membrany w strefie  $(0, a)$  związaną z impulsem początkowym, zależnością

$$(2.5) \quad V_0 = \frac{I}{\pi (aR)^2 m},$$

otrzymuje się następującą bezwymiarową postać równania ruchu:

$$(2.6) \quad \ddot{w} = \alpha_1 \sigma h w_{,\varrho\varrho} + \alpha_1 \frac{\sigma h}{\varrho} w_{,\varrho} + \alpha_2 p(\varrho, \tau),$$

oraz nową postać związków odkształceniowo-przemieszczeniowych

$$(2.7) \quad \varepsilon_r = \alpha_3 w_{,\varrho}^2, \quad \dot{\varepsilon}_r = \alpha_4 w_{,\varrho} \dot{w}_{,\varrho}.$$

Współczynniki  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$  występujące w równaniach (2.6) i (2.7) wynoszą

$$(2.8) \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_0 t_f^2}{mR}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{h_0}{R} \right)^2.$$

Współczynniki  $\alpha_1$  i  $\alpha_4$  w przypadku obciążenia falą ciśnienia są odpowiednio równe

$$(2.9) \quad \alpha_1 = \frac{\sigma_0 t_f^2 h_0}{mR^2}, \quad \alpha_4 = \frac{h_0^2}{t_f R^2}.$$

W zagadnieniu obciążenia idealnym impulsem początkowym wyznaczamy je ze wzorów

$$(2.10) \quad \alpha_1 = \frac{\sigma_0 h_0^3}{mR^2 V_0^2}, \quad \alpha_4 = \frac{h_0 V_0}{R^2}.$$

Szacunkowy czas trwania ruchu membrany  $t_f$ , zależy od czasu trwania obciążenia  $t_0$  i wyznacza się ze wzoru wyprowadzanego w [7]:

$$(2.11) \quad t_f = \frac{1}{\sqrt{\beta}} (\pi - 2 \arccos \sqrt{\beta} t_0), \quad \beta = \frac{7\sigma_0 h_0}{mR^2}.$$

Przyjmując założenie o nieściśliwości materiału, wyznacza się wzór pozwalający określić zmiany grubości membrany w procesie jej deformacji

$$(2.12) \quad h = \frac{1}{1 + \left(\frac{h_0}{R} w_{,e}\right)^2}.$$

Jako związek materiałowy przyjęto do rozważań potęgową postać prawa płynięcia, charakteryzującą wrażliwość materiału na prędkość odkształceń [12]:

$$(2.13) \quad \sigma = 1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

W równaniu (2.13)  $\dot{\epsilon}_0$  i  $n$  są stałymi materiałowymi.

Do rozważań przyjęto następującą postać bezwymiarowej funkcji wymuszenia, określającej zmiany składowej ciśnienia działającej na rozważaną membranę w kierunku przemieszczenia  $w$ :

$$(2.14) \quad p(q, \tau) = \begin{cases} p_0 \left(1 - \frac{\tau t_f}{t_0}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (w_{,e})^2}} & \text{dla } 0 \leq \tau \leq t_0/t_f, \\ 0 & \text{dla } \tau > t_0/t_f. \end{cases}$$

W równaniu (2.14)  $p_0$  oznacza bezwymiarową amplitudę fali ciśnienia. Rozważając obciążenie membrany idealnym impulsem początkowym, spełniano następujące nieciągłe warunki początkowe zagadnienia:

$$(2.15) \quad \dot{w}(q, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq q \leq a \quad \text{i} \quad \tau = 0, \\ 0 & \text{dla } a < q \leq 1 \quad \text{i} \quad \tau = 0, \end{cases}$$

$$w(q, \tau) = 0 \quad \text{dla } 0 \leq q \leq 1 \quad \text{i} \quad \tau = 0,$$

lub odpowiadające im warunki spełniane na całej powierzchni membrany i wyznaczone techniką modalną [4]:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \dot{w}(\varrho, \tau) &= \left(3a^2 - \frac{3}{2}a^4\right)(1-\varrho^2) & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq 1 \quad \text{i} \quad \tau = 0, \\ w(\varrho, \tau) &= 0 & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq 1 \quad \text{i} \quad \tau = 0. \end{aligned}$$

Zagadnienie ruchu niesprężystej membrany, której źródłem obciążenia jest niekontaktowy lub kontaktowy ładunek materiału wybuchowego o znanych parametrach, opisuje jednoznacznie następujący bezwymiarowy układ równań: 1) równanie ruchu (2.6), 2) związki odkształceniowo-przemieszczeniowe (2.7), 3) funkcja zmiany grubości (2.12), 4) związek materiałowy (2.13), 5) funkcja obciążenia (2.14), 6) warunek początkowy (2.15) lub (2.16) oraz warunki brzegowe poprawne dla membrany kołowej utwierdzonej na obwodzie.

Nieznanymi funkcjami występującymi w równaniach problemu zależnymi od  $\varrho$  i  $\tau$  są  $w$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\dot{\varepsilon}_r$ ,  $\sigma$  i  $h$ .

### 3. METODA ROZWIĄZANIA

Równanie ruchu (2.6) pozwalające określić w każdej chwili czasu położenie punktu zdefiniowanego na powierzchni środkowej membrany przed deformacją współrzędną  $\varrho$  jest równaniem różniczkowym cząstkowym nieliniowym ze współczynnikami, których wartości wyznaczamy z równań (2.7), (2.12) i (2.13), te zaś zależą od rozwiązań równania ruchu.

Pełne rozwiązanie omawianego problemu wymaga zatem przyjęcia odpowiedniej stabilnej metody numerycznej. Przedstawione będą ogólne właściwości metody oraz ideowy algorytm rozwiązania. W pracy [9] przedstawiona będzie analiza stabilności i zbieżności zastosowanej metody.

#### 3.1. Ogólne sformułowanie metody

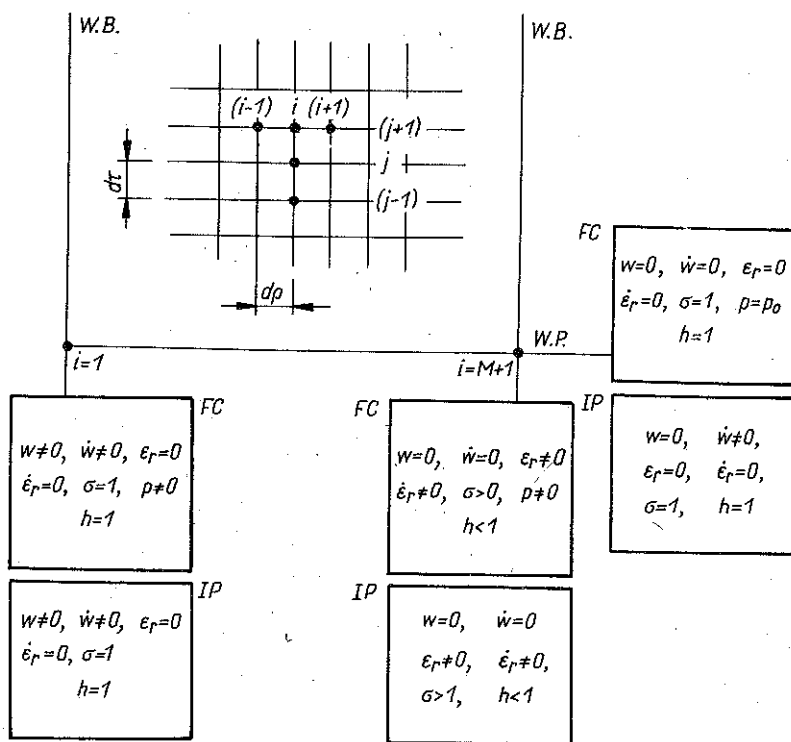
W celu rozwiązania zagadnienia dynamiki umiarkowanie dużych ugięć niesprężystej membrany kołowej, sformułowanego analitycznie w punkcie 2 zastosowano metodę różnic skończonych [8 i 13], w której 1) wykorzystano niejawną procedurę całkowania równania ruchu względem czasu, 2) przyjęto metodę „przeganiania” rozwiązując równania różnicowe na aktualnej warstwie czasowej oraz 3) zastosowano iteracje w celu ustalenia współczynników równania ruchu.

Równania różniczkowe przekształcono w ramach przyjętej metody do równań różnicowych apróksymując pochodne cząstkowe schematami różnicowymi rzędu  $\Delta\tau$  i  $(d\varrho)^2$  zgodnie z następującymi wzorami:

$$(3.1) \quad w_{,ee}^{j+1} = \frac{w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}}{dq^2}, \quad w_{,e}^{j+1} = \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}}{2dq},$$

$$\dot{w}_i = \frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{d\tau^2}.$$

We wzorach (3.1) wskaźnik górny oznacza współrzędną czasową, wskaźnik zaś dolny współrzędną przestrzenną określoną na siatce czasowo-przestrzennej (rys. 3).



Rys. 3

Na rys. 3 przedstawiono warunki graniczne rozwiązywanych zagadnień oznaczone symbolem FC dla membrany obciążonej falą ciśnienia i symbolem IP dla membrany obciążonej idealnym impulsem początkowym.

### 3.2. Różnicowe równanie ruchu

Wykorzystując definicję pochodnych (3.1) w różniczkowym równaniu ruchu (2.6), otrzymuje się równanie różnicowe

$$(3.2) \quad D_i w_i^{j+1} = G_i w_{i+1}^{j+1} + H_i w_{i-1}^{j+1} + F_i,$$

w których współczynniki  $D_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$  określone są wzorami

$$(3.3) \quad \begin{aligned} D_i &= 1 + 2\alpha_1 \sigma_i h_i \left( \frac{d\tau}{d\varrho} \right)^2, \\ G_i &= \alpha_1 \sigma_i h_i \left[ \left( \frac{d\tau}{d\varrho} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_i} \frac{d\tau^2}{2d\varrho} \right], \\ H_i &= \alpha_1 \sigma_i h_i \left[ \left( \frac{d\tau}{d\varrho} \right)^2 - \frac{1}{\varrho_i} \frac{d\tau^2}{2d\varrho} \right], \\ F_i &= 2w_i^j - w_i^{j-1} + \alpha_2 d\tau^2 p_i^{j+1}. \end{aligned}$$

Równania różnicowe (3.2) można przekształcić do równania o strukturze następującej:

$$(3.4) \quad w_i^{j+1} = Y_i + Z_i w_{i+1}^{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad i = M, M-1, M-2, \dots, 1,$$

w którym współczynniki  $Y_i$  i  $Z_i$  nazywane często parametrami pośrednimi metody „przeganiania”, określone są następująco:

$$(3.5) \quad Y_i = \frac{F_i + H_i Y_{i-1}}{D_i - H_i Z_{i-1}}, \quad Z_i = \frac{G_i}{D_i - H_i Z_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, M,$$

$Y_1$  i  $Z_1$  zaś wyznaczono, spełniając warunki brzegowe na osi membrany. Na pierwszej niezerowej warstwie czasowej równanie (3.4) przyjmuje postać

$$(3.6) \quad w_i^1 = Y_i + Z_i w_{i+1}^1.$$

Współczynniki  $Y_i$  i  $Z_i$  występujące w równaniu (3.6) wyznacza się ze wzoru (3.5), współczynniki  $G_i$  i  $H_i$  wzoru (3.3), a współczynniki  $D_i$  i  $F_i$  mają postać

$$(3.7) \quad \begin{aligned} D_i &= 2 \left[ 1 + \alpha_1 \sigma_i h_i \left( \frac{d\tau}{d\varrho} \right)^2 \right], \\ F_i &= 2 (w_i^0 + \dot{w}_i^0 d\tau) + \alpha_2 d\tau^2 p_i^1. \end{aligned}$$

Różniczkowe równanie ruchu punktu środkowego membrany ( $\varrho = 0$ ,  $i = 1$ )

$$(3.8) \quad 2\alpha_1 \dot{w}_{,ee} + \alpha_2 p,$$

przyjmuje następującą postać różnicową:

$$(3.9) \quad \frac{w_1^{j+1} - 2w_1^j + w_1^{j-1}}{d\tau^2} = 2\alpha_1 \frac{2(w_2^{j+1} - w_1^{j+1})}{d\varrho^2} + \alpha_2 p_i^{j+1},$$

którą można sprowadzić do następującej struktury metody „przeganiania”:

$$(3.10) \quad w_1^{j+1} = \left( \frac{a}{1+a} \right) w_2^{j+1} + \left( \frac{\alpha_2}{1+a} \right) d\tau^2 p_i^{j+1} - \left( \frac{1}{1+a} \right) w_1^{j-1} + \left( \frac{2}{1+a} \right) w_1^j,$$



gdzie

$$a = 4\alpha_1 \left( \frac{d\tau}{d\rho} \right)^2.$$

Porównując równania (3.10) i (3.4) określono początkowe parametry pośrednie:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} Y_1 &= \left( \frac{\alpha_2}{1+a} \right) d\tau^2 p_1^{j+1} - \left( \frac{1}{1+a} \right) w_1^{j-1} + \left( \frac{2}{1+a} \right) w_1^j, \\ Z_1 &= \left( \frac{a}{1+a} \right). \end{aligned}$$

Na pierwszej niezerowej warstwie czasowej równanie (3.10) przyjmie postać

$$(3.12) \quad w_1^1 = \left( \frac{a}{1+a} \right) w_2^1 + \left( \frac{\alpha_2}{1+a} \right) d\tau^2 p_1^1 - \left( \frac{1}{1+a} \right) w_1^{-1} + \left( \frac{2}{1+a} \right) w_1^0.$$

Wykorzystując w równaniu (3.12) warunek początkowy

$$(3.13) \quad \frac{w_1^1 - w_1^{-1}}{2d\tau} = \dot{w}_1^0,$$

otrzymano różnicowe równanie ruchu punktu środkowego membrany spełniane na pierwszej niezerowej warstwie czasowej:

$$(3.14) \quad w_1^1 = \left( \frac{a}{2+a} \right) w_2^1 + \left( \frac{\alpha_2}{2+a} \right) d\tau^2 p_1^1 + \left( \frac{2}{2+a} \right) \dot{w}_1^0 d\tau + \left( \frac{2}{2+a} \right) w_1^0.$$

Porównując równanie (3.14) z równaniem (3.6) określono początkowe parametry pośrednie:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} Y_1 &= \left( \frac{\alpha_2}{2+a} \right) d\tau^2 p_1^1 + \left( \frac{2}{2+a} \right) \dot{w}_1^0 d\tau + \left( \frac{2}{2+a} \right) w_1^0, \\ Z_1 &= \left( \frac{a}{2+a} \right). \end{aligned}$$

Pochodne mieszane występujące w równaniu (2.7) aproksymowano następującymi schematami różnicowymi:

Dla  $i = 2, 3, \dots, M$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \dot{w}_{,e} &= \frac{1}{4d\rho d\tau} [(w_{i+1}^{j+1} - w_{i+1}^{j-1}) - (w_{i-1}^{j+1} - w_{i-1}^{j-1})], \quad j = 1, 2, \dots, \\ \dot{w}_{,e} &= \frac{1}{2d\rho d\tau} [(w_{i+1}^1 - w_{i+1}^0) - (w_{i-1}^1 - w_{i-1}^0)], \quad j = 0. \end{aligned}$$

Dla  $i = 1$

$$(3.17) \quad \dot{w}_{,e} = 0.$$

Dla  $i = M + 1$

$$(3.18) \quad \dot{w}_{,e} = -\frac{1}{2d_Q d\tau} (w_M^{j+1} - w_M^{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\dot{w}_{,e} = -\frac{1}{d_Q d\tau} (w_M^1 - w_M^0), \quad j = 0.$$

### 3.3. Algorytm rozwiązania

Przystępując do rozwiązania zagadnienia dynamiki niesprężystej membrany kołowej skonstruowano tablicę stanu  $R(k, i)$ , w której wskaźnik  $k$  oznacza numer składowej, wskaźnik zaś  $i$  numer punktu określonego na rozważanej warstwie czasowej siatki różnicowej (rys. 3). Poszczególne składowe tablice stanu oznaczają co następuje:

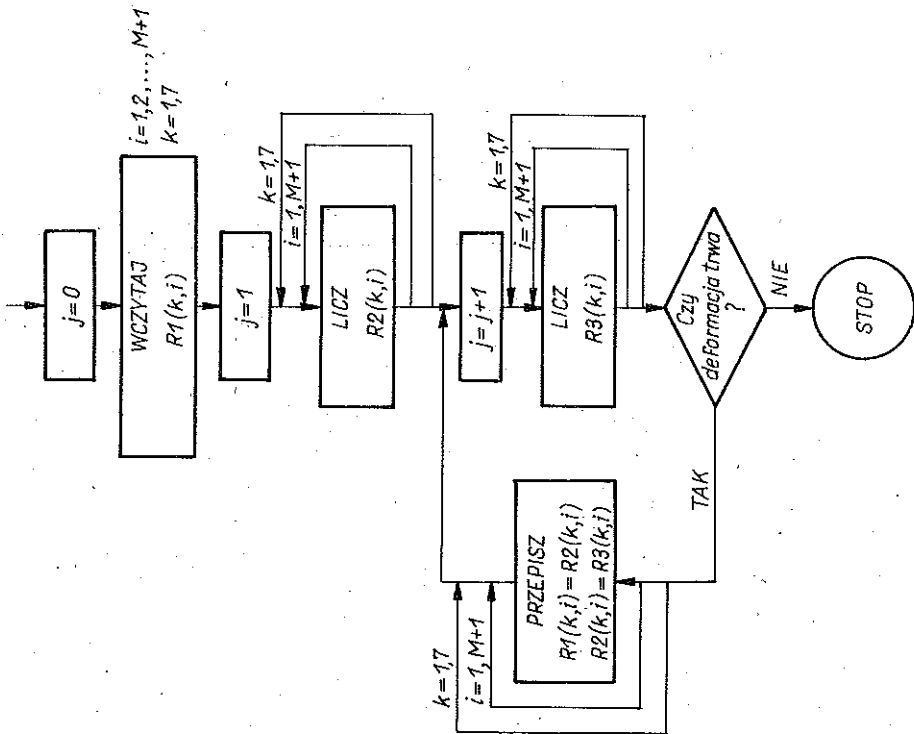
$$(3.19) \quad \begin{array}{llll} R(1, i) = w, & R(2, i) = \dot{w}, & R(3, i) = \varepsilon_r, & R(4, i) = \dot{\varepsilon}_r, \\ R(5, i) = \sigma, & R(6, i) = p, & R(7, i) = h. \end{array}$$

Ogólny algorytm rozwiązania przewiduje następujące etapy postępowania

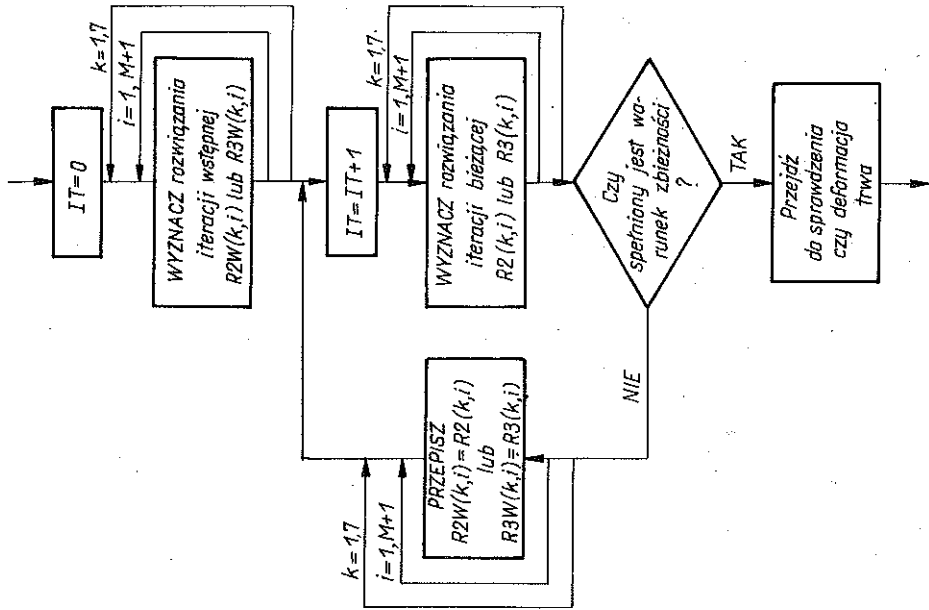
- 1) Wczytanie tablicy warunku początkowego  $R1(k, i)$ .
- 2) Wyznaczenie rozwiązania na pierwszej warstwie czasowej  $R2(k, i)$ .
- 3) Wyznaczenie rozwiązania na kolejnej warstwie czasowej  $R3(k, i)$ .
- 4) Sprawdzenie, czy proces deformacji membrany trwa. Jeśli membrana znajduje się w ruchu to, dokonuje się przepisania tablic  $R3(k, i) \rightarrow R2(k, i)$  i wyznacza się ponownie rozwiązanie dla kolejnej warstwy czasowej  $R3(k, i)$ . Jeśli zaś ruch membrany ustał, to kończymy proces obliczeń (rys. 4).

Poszukiwanie rozwiązań na poszczególnych warstwach czasowych  $R2(k, i)$ ,  $R3(k, i)$  przebiega według następującego algorytmu (rys. 5):

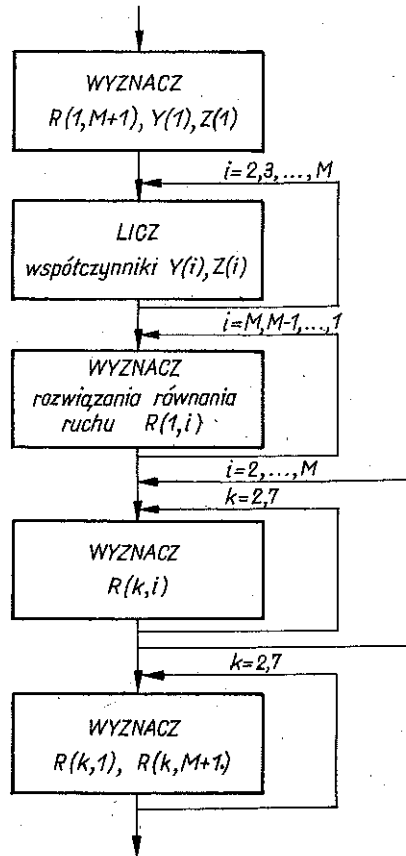
- 1) Wyznaczamy rozwiązania iteracji „wstępnej”  $R2W(k, i)$  lub  $R3W(k, i)$ , ustalając współczynniki  $D_i, G_i, H_i$  na podstawie znanych rozwiązań z poprzedniej warstwy czasowej, odpowiednio  $R1(k, i)$  lub  $R2(k, i)$ .
- 2) Wyznaczamy rozwiązania iteracji „bieżącej”  $R2(k, i)$  lub  $R3(k, i)$ , ustalając współczynniki  $D_i, G_i, H_i$  na podstawie znanych rozwiązań z bieżącej warstwy czasowej i iteracji „wstępnej”, odpowiednio  $R2W(k, i)$  lub  $R3W(k, i)$ .
- 3) Sprawdzamy zbieżność procesu iteracji. Jeśli warunek zbieżności nie jest spełniony dokonujemy przepisania tablic  $R2(k, i) \rightarrow R2W(k, i)$  lub  $R3(k, i) \rightarrow R3W(k, i)$  i wyznaczamy ponownie rozwiązanie iteracji „bieżącej”, odpowiednio  $R2(k, i)$  lub  $R3(k, i)$ ; jeśli zaś warunek zbieżności jest spełniony dla aktualnej warstwy czasowej  $R3(k, i)$ , to sprawdzamy, czy proces deformacji membrany trwa, postępując zgodnie z ogólnym algorytmem opisanym poprzednio.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

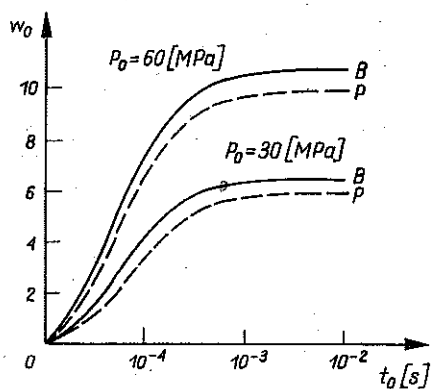
Poszukiwanie rozwiązań dla dowolnej warstwy czasowej na każdej iteracji  $R2W(k, i)$ ,  $R2(k, i)$ ,  $R3W(k, i)$ ,  $R3(k, i)$  odbywa się według następującego algorytmu (rys. 6): 1) Ustalamy warunki brzegowe równań ruchu. 2) Wyznaczamy współczynniki metody „przeganiania”  $Y_i$ ,  $Z_i$ ,  $i = 2, \dots, M$ . 3) Wyznaczamy rozwiązanie równania ruchu  $w_i$ ,  $i = M, M-1, \dots, 1$ . 4) Obliczamy wartości pozostałych składowych tablicy stanu  $\dot{w}_i$ ,  $\varepsilon_{ri}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ri}$ ,  $\sigma_i$ ,  $h_i$  w wewnętrznych punktach siatki czasowo-przestrzennej,  $i = 2, \dots, M$ . 5) Obliczamy wartości pozostałych składowych tablicy stanu w punktach brzegowych zagadnienia.

#### 4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH I DyskusJA

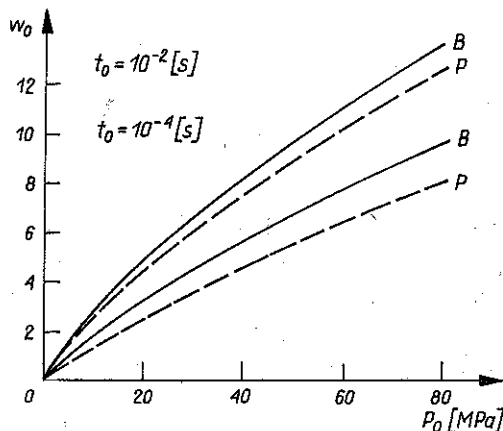
Obliczenia prowadzono dla membrany stalowej o następujących parametrach materiałowych i geometrycznych:  $\sigma_0 = 223 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}$ ;  $n = 5$ ;

$n = 500$ ;  $\dot{\epsilon}_0 = 40 \text{ s}^{-1}$ ;  $m = 15,15 \text{ Nm}^{-3} \text{ s}^2$ ;  $R = 31,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $h_0 = 1,93 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $a = 0,5$ ;  $\alpha = 1,0$ .

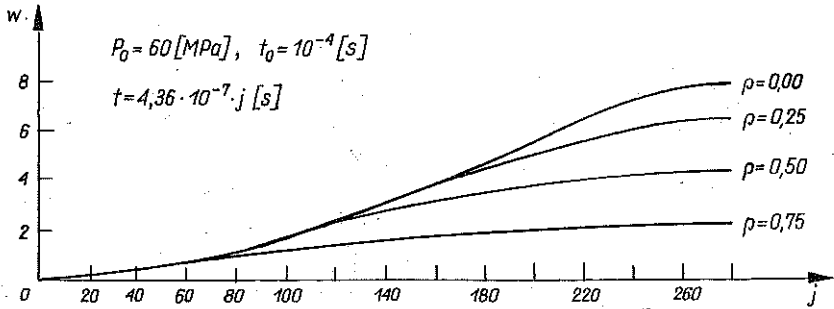
Rysunki od 7 do 19 przedstawiają następujące wykresy: 1) Wykresy względnego ugięcia trwałego punktu środkowego membrany  $w_0$  jako funkcji czasu trwania obciążenia  $t_0$  dla dwóch wartości amplitudy ciśnienia  $P_0$  (rys. 7). 2) Wykresy względnego ugięcia trwałego punktu środkowego membrany  $w_0$  jako funkcji amplitudy ciśnienia  $P_0$  dla dwóch wartości czasu trwania obciążenia  $t_0$  (rys. 8). 3) Wykresy ugięcia w czasie punktów membrany określonych współrzędną  $\varrho$  przy ustalonych parametrach obciążenia  $P_0$  i  $t_0$  (rys. 9). 4) Profile deformującej się membrany dla kilku chwil czasowych określonych wskaźnikiem  $j$  przy ustalonych parametrach obciążenia (rys. 10). 5) Znormalizowane profile deformującej się membrany dla kilku chwil czasowych przy ustalonych parametrach obciążenia (rys. 11). 6) Wykresy prędkości ugięcia w czasie punktów membrany określonych współrzędną  $\varrho$  przy ustalono-



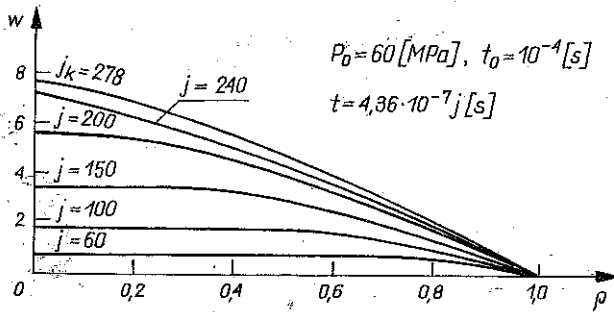
Rys. 7



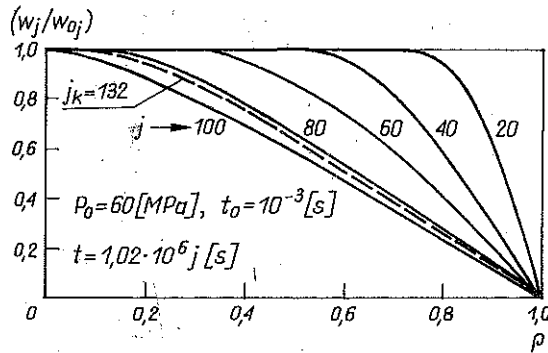
Rys. 8



Rys. 9

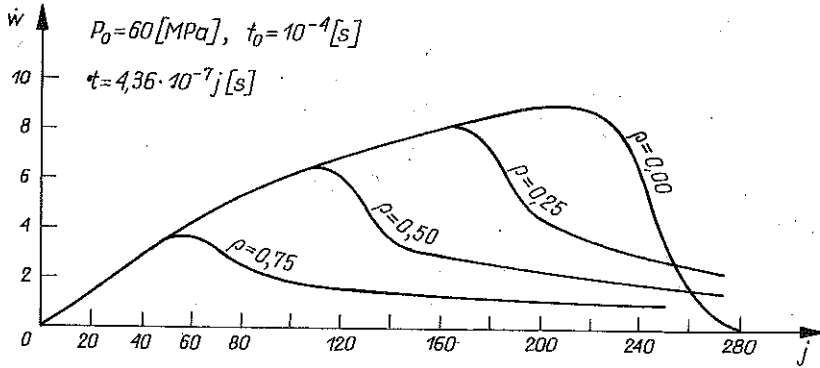


Rys. 10

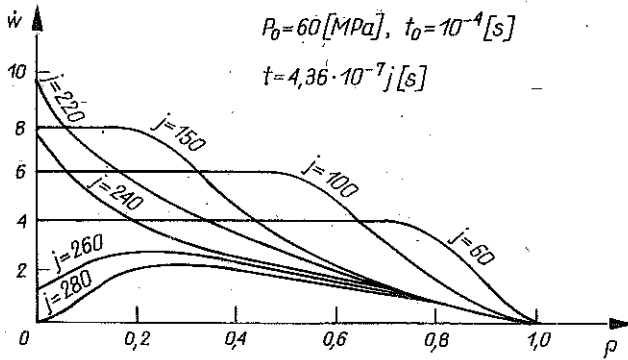


Rys. 11

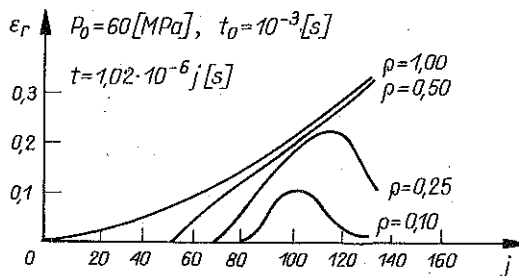
nych parametrach obciążenia (rys. 12). 7) Profile funkcji prędkości deformującej się membrany dla kilku chwil czasowych przy ustalonych parametrach obciążenia (rys. 13). 8) Wykresy odkształceń  $\varepsilon_r$  w czasie określane w punktach membrany o współrzędnej promieniowej  $\rho$  dla ustalonych parametrów obciążenia (rys. 14). 9) Profile funkcji odkształcenia dla kilku chwil czasowych przy ustalonych parametrach obciążenia (rys. 15). 10) Wykresy grubości membrany w czasie dla kilku punktów membrany określonych współrzędną  $\rho$  przy ustalonych parametrach obciążenia (rys. 16). 11) Znormalizowane profile



Rys. 12

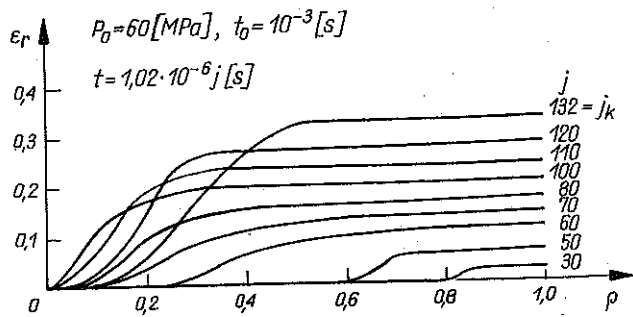


Rys. 13

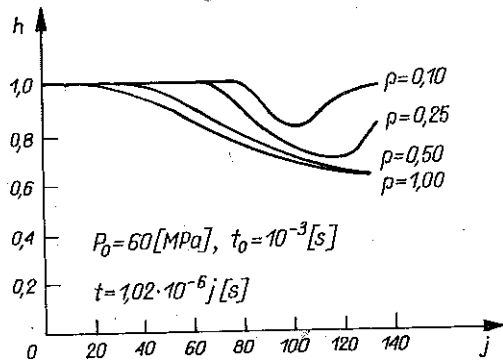


Rys. 14

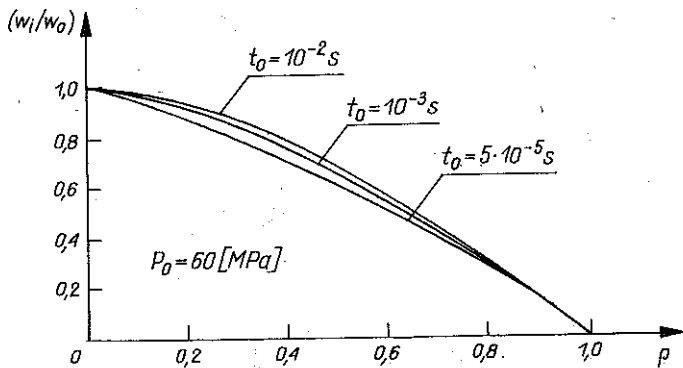
zdeformowanej membrany jako funkcji czasu trwania obciążenia przy ustalonej jego amplitudzie (rys. 17). 12) Wykresy względnego ugięcia trwałego punktu środkowego membrany w funkcji impulsu początkowego  $I$ , w przypadku gdy promień strefy obciążenia  $a = 0,5$  (rys. 18). 13) Wykresy względnego ugięcia trwałego punktu środkowego membrany jako funkcji impulsu początkowego  $I$ , w przypadku gdy promień strefy obciążenia  $a = 1,0$  (rys. 19).



Rys. 15

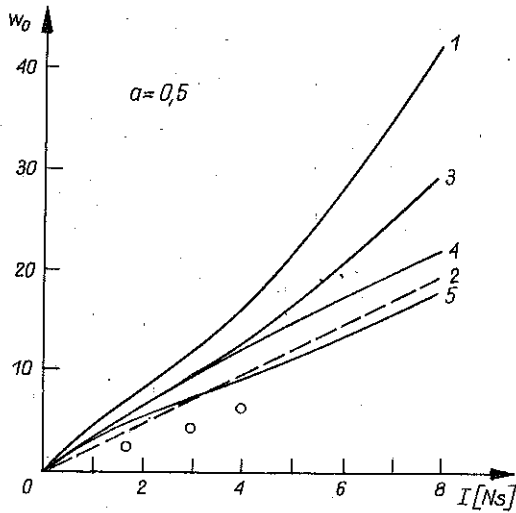


Rys. 16

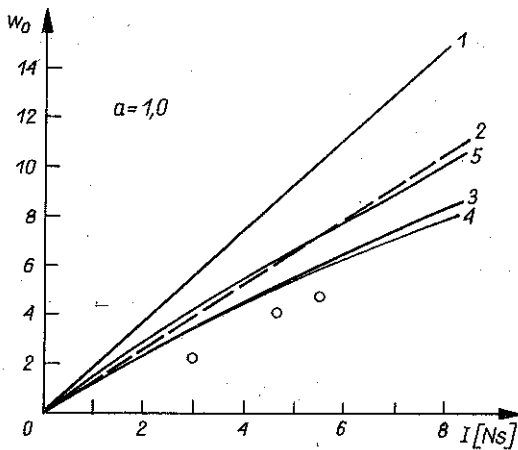


Rys. 17





Rys. 18



Rys. 19

Na rys. 7 i rys. 8 oznaczono linią ciągłą wyniki otrzymane metodą omówioną w prezentowanej pracy, linią zaś przerywaną wyniki otrzymane metodą przybliżoną przedstawioną w [7]. Krzywe te oznaczono odpowiednio wskaźnikami  $B$ ,  $P$ . Przedstawione na rys. 7 i rys. 8 wykresy wskazują, iż metoda przybliżona, którą przedstawiono w [7] prowadzi do wyników nieco zaniżonych względem wyników otrzymanych obecnie. Minimalne różnice dopuszczają możliwość stosowania metod przybliżonych tam, gdzie interesującym nas parametrem ruchu membrany jest maksymalne ugięcie jej środkowego punktu.

Krzywe zamieszczone na rys. 9 przedstawiają ugięcie kilku punktów zlokalizowanych na powierzchni membrany jako funkcję bezwymiarowego czasu określonego wskaźnikiem  $j$ . Na rys. 9 oraz na następnych rysunkach podano wykresy pozwalające obliczyć fizyczną wartość czasu  $t$ , w którym realizowany jest proces deformacji membrany.

Krzywe zamieszczone na rys. 16 przedstawiające zmiany profilu membrany w trakcie procesu deformacji wskazują, że proces deformacji membrany inicjowany jest na utwierdzeniu, po czym przemieszcza się w kierunku jej punktu środkowego. W konsekwencji płaska w pierwszej fazie ruchu membrana przybiera sukcesywnie kształt stożka, w końcowej zaś fazie ruchu lekko się uwypukla. Profil zdeformowanej membrany wyznaczony analitycznie odbiega od profilu realizowanego w doświadczeniu. Jest to konsekwencją tego, iż w opisie teoretycznym zaniedbano składową poziomą siły wymuszającej i składową podłużną promieniową przemieszczenia  $U$ . Takie założenie upraszczające chociaż daje zakłócony obraz profilu zdeformowanej membrany, to jednak prowadzi do ugięć trwałych nie odbiegających od uzyskanych w eksperymencie [5].

Krzywe zamieszczone na rys. 11 przedstawiają normalizowany profil deformującej się membrany. Uwidacznia się wyraźny wpływ zaniedbania składowej poziomej siły wymuszającej na proces deformowania membrany przy obciążeniu zmiennym w czasie.

Krzywe zamieszczone na rys. 12 charakteryzują proces deformacji membrany. Przedstawiają one zmiany prędkości przemieszczenia w kilku punktów membrany określonych współrzędną  $\varrho$ . Można zauważyć, że w pierwszej fazie ruchu wszystkie punkty mają jednakową prędkość przemieszczenia. W kolejnych chwilach czasu zaczyna rozwijać się proces opóźniania podążający za procesem przyspieszenia, przy czym podczas gdy punkty leżące bliżej osi przyspieszają, punkty leżące bliżej zamocowania przechodzą kolejno w fazę opóźniania. Proces przyspieszania kończy się w punkcie środkowym, w którym obserwuje się maksymalną w procesie deformacji prędkość przemieszczenia. W kolejnych chwilach czasu wszystkie punkty membrany znajdują się w fazie hamowania ruchu. Ponadto zauważamy, że proces zatrzymania ruchu rozpoczyna się w membranie w punkcie środkowym, a kończy na jej zamocowaniu. Spostrzeżenia te potwierdzają krzywe zamieszczone na rys. 13, na którym przedstawiono kolejne profile funkcji prędkości przemieszczenia membrany. Kolejne, zmienne w charakterze fazy ruchu membrany, są tu wyraźnie widoczne.

Krzywe zamieszczone na rys. 14 przedstawiają wykresy odkształcenia  $\varepsilon_j$  jako funkcje czasu w kilku punktach zdefiniowanych na membranie wzdłuż jej promienia. Proces odkształcania rozpoczyna się od punktów leżących na zamocowaniu. Punkty leżące bliżej osi wchodzi w fazę odkształcania później, niż punkty położone bliżej zamocowania. Odkształcenia punktów leżących w okolicy osi rosną w pierwszej fazie procesu deformacji oraz

maleją w końcowej fazie ruchu, natomiast odkształcenia pozostałych punktów rosną w czasie całego procesu deformacji.

Na rys. 15 przedstawiono profile funkcji deformacji membrany zmieniające się w trakcie procesu ruchu. W początkowej fazie ruchu odkształcane są kolejno punkty leżące w pobliżu utwierdzenia. Strefa odkształconej membrany przemieszcza się w trakcie procesu w kierunku osi. Od chwili, w której cała membrana odkształciła się proces zaczyna przebiegać w ten sposób, że odkształcenia punktów leżących bliżej zamocowania rosną, punktów zaś leżących w okolicy osi membrany maleją.

Krzywe zamieszczone na rys. 16 przedstawiają zmiany grubości membrany w kilku punktach określonych współrzędną  $\varrho$  jako funkcję czasu. Charakterystyczną cechą rozważanych wykresów jest to, że grubość membrany maleje w całym jej obszarze z wyjątkiem pewnej strefy środkowej, w której w końcowej fazie ruchu następuje ponowny wzrost jej grubości.

Wykresy zamieszczone na rys. 17 wskazują, iż profil zdeformowanej membrany zależy od czasu trwania obciążenia  $t_0$ . Dla bardzo krótkich czasów trwania obciążenia, dla których przypomina ono idealny impuls początkowy profil zdeformowanej membrany przypomina stożek. Przy długim czasie trwania obciążenia wydłuża się okres czasu, w którym fala ciśnienia obrabia deformującą się membranę, przez co duży udział w procesie obróbki przejmuje również składowa pozioma obciążenia. Uwzględnienie tej składowej w opisie zagadnienia spowoduje wygenerowanie profilu zdeformowanej membrany bardziej zbliżonego do czaszy kulistej, co jest obserwowane w eksperymencie.

Krzywe zamieszczone na rys. 18 i rys. 19 przedstawiają: 1) wykresy rozwiązania równania (2.6) uzyskanego metodą różnic skończonych dla sztywno-plastycznego modelu materiału z podwyższoną granicą plastyczności  $\sigma_0 \approx 2$  ( $n = 500$  w równaniu (2.13)), z warunkami początkowymi (2.15) i zmienną grubością membrany  $h = h(\varrho, \tau)$ ; 2) wykresy równania (2.6) uzyskanego metodą przybliżoną [6] dla lepkoplastycznego modelu materiału (2.13); 3) wykresy rozwiązania równania (2.6) metodą różnic skończonych dla lepkoplastycznego modelu materiału (2.13) z warunkami początkowymi (2.15) i zmienną grubością membrany  $h = h(\varrho, \tau)$ ; 4) wykresy rozwiązania równania (2.6) — metodą różnic skończonych dla lepkoplastycznego modelu materiału (2.13) z warunkami początkowymi (2.15) i stałą grubością membrany  $h = h_0$ ; 5) wykresy rozwiązania równania (2.6) metodą różnic skończonych dla lepkoplastycznego modelu materiału z warunkami początkowymi (2.16) i zmienną grubością membrany  $h = h(\varrho, \tau)$ .

Ponadto na wykresach kółeczkami oznaczono orientacyjne położenie wyników eksperymentalnych, które omówione są szczegółowo w [12].

Analiza wykresów (rys. 18, rys. 19) pozwala wyszczególnić następujące efekty i czynniki mające istotny wpływ na proces deformacji zamocowanej membrany kołowej obciążonej dynamicznie idealnym impulsem początkowym

rozłożonym symetrycznie i równomiernie na membranie w strefie określonej promieniem  $a$ : 1) osłabienie membrany związane ze zmniejszaniem się jej grubości, 2) wzmocnienie materiałowe charakteryzujące wrażliwość materiału membrany na prędkość odkształcenia, 3) wpływ postaci warunku początkowego, 4) wzmocnienie geometryczne związane z generacją obwodowych sił membranowych oraz istnieniem podłużnej składowej przemieszczenia (w pracy pominięto, por. (2.1) i (2.6)). Wpływ zmniejszania grubości membrany na jej osłabienie uwidacznia się wyraźniej w przypadku obciążeń o większej intensywności (rys. 18, krzywa 1). Uwzględnienie wrażliwości materiału membrany na prędkość jej deformacji doprowadza do istotnego zaniżenia trwałych ugięć  $w_0$  (krzywe 3 na rys. 18 i rys. 19). Przyjęcie założenia, iż w trakcie procesu grubość membrany pozostaje stała, prowadzi do jej sztucznego wzmocnienia i zaniżenia ugięć trwałych  $w_0$  (krzywe 4 na rys. 18 i rys. 19). Ponadto w przypadku obciążeń impulsem początkowym o większej intensywności (rys. 18) daje się zauważyć graniczną wartość  $I_{gr}$  określającą przedział zmian obciążeń  $I \leq I_{gr}$ , dla których uwzględnianie  $h = h(\rho, \tau)$  jest nieistotne. Wniosek ten ma ważne znaczenie praktyczne, pozwala bowiem rozwiązywać równanie różniczkowe cząstkowe (2.6) o mniejszym stopniu nieliniowości.

Analiza wyników obliczeń numerycznych przedstawionych na rys. od 7 do 19 pozwala sformułować grupy wniosków ogólnych dotyczących: 1) numerycznego modelowania dynamiki niesprężystych membran obciążanych falą ciśnienia o dużej intensywności lub idealnym impulsem początkowym; 2) jakościowej oceny metod przybliżonych przedstawionych w [6 i 7]; 3) zastosowania metod obliczeniowych w praktyce inżynierskiej.

Zaproponowany opis procesu deformacji utwierdzonej membrany kołowej wykonanej z materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia oraz wykorzystana metoda rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych dość wiernie modelują rozważane zjawisko, pozwalając śledzić takie jego elementy, jak ewolucja profilu funkcji ugięcia, prędkości ugięcia, odkształcenia, grubości membrany, zwłaszcza w fazie początkowej i fazie końcowej procesu. Rezultaty badań numerycznych wskazują jednak, iż chcąc śledzić proces deformacji membrany realizowany przy dużych intensywnościach obciążeń, któremu towarzyszy generacja dużych sił bezwładności oraz duże przemieszczenia, należy zrezygnować z pewnych założeń upraszczających, takich jak  $N_{r,r} = 0$  oraz  $U = 0$ . Okazuje się bowiem, że składowa pozioma obciążenia  $P_r$  może mieć istotny wpływ na proces deformowania membrany. Obserwowane na zamieszczonych wykresach profile funkcji odkształcenia oraz przebiegi funkcji określającej zmiany grubości membrany wskazują, że siły membranowe są funkcją zarówno zmiennej przestrzennej, jak i czasu. Nie uwzględnienie możliwości deformowania membrany przez poziomą składową obciążenia prowadzi do wygenerowania w trakcie obliczeń profilu zdeformowanej membrany o kształcie zbliżonym do stożka, a więc niezgodnych z rzeczywistością. Stożkowy kształt jest bowiem możliwy tylko w przypadkach, gdy obciążenie

charakteryzuje się bardzo krótkim czasem trwania, znacznie krótszym od czasu deformacji membrany. W tym bowiem przypadku obciążenie ma charakter idealnego impulsu początkowego, a proces deformacji odbywa się bez udziału sił zewnętrznych, które nie uczestniczą w procesie obróbki membrany.

W metodach przybliżonych, wykorzystując techniki modalne, zastępuje się nieciągłe warunki początkowe (2.15) warunkami ciągłymi sformułowanymi na całej powierzchni membrany (2.16). O ile w przypadku poszukiwania rozwiązań równania (2.6) metodami przybliżonymi [2, 6 i 7] zabieg ten zapewnia otrzymanie wyników zadawalających, o tyle w metodzie różnic skończonych, która umożliwia wierne modelowanie procesu, wygodniej jest korzystać z bezpośrednich nieciągłych warunków początkowych. W przypadku korzystania z warunków rozłożonych na całej powierzchni membrany otrzymujemy wyniki obarczone błędami o wartościach i znaku zależnych od intensywności impulsu początkowego (krzywe 5 na rys. 18 i rys. 19).

Przedstawiona metoda numerycznego modelowania procesu deformacji membrany obciążonej idealnym impulsem początkowym opiera się na uproszczonym równaniu ruchu (2.6), które otrzymano z równań równowagi (2.1), przyjmując świadomie pewne założenia upraszczające natury geometrycznej ( $U = 0$ ,  $N_\theta \ll N_r$ ,  $N_{r,r} = 0$ ). Założenia te prowadzą jednak do wyników odbiegających od wyników uzyskanych w eksperymentach (rys. 18, rys. 19).

Przedstawiony matematyczny model procesu składający się z układu równań oraz metody ich rozwiązania stanowi pewną podstawę do jakościowej oceny przybliżonych metod modelowania dynamiki niesprężystych membran [6 i 7]. Mówimy o jakościowej ocenie z dwóch względów: 1) metody mają charakter przybliżony mający zastosowania inżynierskie, 2) można porównywać jedynie końcowe trwałe efekty deformacji w postaci ugięcia punktu środkowego membrany oraz śledzić ruch tego właśnie punktu w obu modelach. Istota modelu przybliżonego polega bowiem na przyjęciu założenia o istnieniu stacjonarnego pola prędkości przemieszczeń i sprowadzeniu zagadnienia cząstkowego do równania opisującego ruch środkowego punktu membrany. Zakłada się ponadto w modelu przybliżonym, iż grubość membrany oraz siły podłużne promieniowe nie zależą od współrzędnej przestrzennej. Krzywe przedstawione na rys. 7 i rys. 8 wskazują, iż modele uproszczone mogą być z powodzeniem wykorzystywane w praktyce inżynierskiej.

Przedstawione wyniki obliczeń potwierdzają możliwość wykorzystania rozważanych elementów w membranowych czujnikach ciśnienia, w których trwałe ugięcie punktu środkowego membrany pomiarowej zależy od amplitudy ciśnienia działającego na czujnik [5].

Krzywe przedstawione na rys. 17 pozwalają przypuszczać, iż mechaniczny czujnik ciśnienia może być wykorzystany również do pomiaru czasu trwania obciążenia, widać bowiem, że jest to parametr decydujący o kształcie profilu zdeformowanej membrany. Czas i sposób obróbki membrany przez składowe

sił wymuszających zależą bowiem od czasu współdziałania membrany z tymi siłami wyznaczonego przez skalę czasową procesu deformacji [7].

Prognozowanie procesu oparte na mniej drastycznych założeniach upraszczających a następnie wykonanie odpowiedniego zestawu profilomierzy pozwoli stosować membranowe czujniki ciśnień do pomiaru zarówno amplitudy ciśnienia  $P_0$  jak i czasu trwania  $t_0$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. BAK, D. NIEPOSTYN, T. WIERZBICKI, *Metody rozwiązań w dynamice plastycznych konstrukcji powłokowych*, Symposium „Konstrukcje powłokowe, Teoria i zastosowanie”, Kraków 1974.
2. P. S. SYMONDS, T. WIERZBICKI, *Membrane mode solution for impulsively loaded circular plates*, J. Appl. Mech., **46**, 1, 1979.
3. T. WIERZBICKI, *A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates*, Int. J. Solids Struct., **6**, 1970.
4. W. IDCZAK, T. WIERZBICKI, *Dynamic loading of a viscoplastic membrane*, Biul. PAN, Appl. Mech., **24**, 7-8, 1981.
5. W. IDCZAK, CZ. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Sztywno-lepkoplastyczne płyty kołowe pod intensywnym obciążeniem dynamicznym, Analiza teoretyczno doświadczalna i propozycja zastosowań*, Mech. Teoret. Stos., **4**, 1986.
6. W. IDCZAK, *Przybliżone rozwiązania w dynamice niesprężystych membran, Część 1*, Rozpr. Inż., **33**, 4, 1985.
7. W. IDCZAK, *Przybliżone rozwiązania w dynamice niesprężystych membran, Część 2*, Rozpr. Inż., **3**, 1986.
8. G. I. MARCZUK, *Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1983.
9. W. IDCZAK, I. WINNICKI, *Stabilność i zbieżność metody numerycznej stosowanej w dynamice niesprężystych membran*, Rozpr. Inż., **35**, 3, 1987.
10. G. BAK, W. IDCZAK, A. SPYCHAŁA, *Sztywno-lepkoplastyczna membrana kołowa obciążona impulsem ciśnienia*, Biul. WAT, **25**, 8, 1976.
11. M. K. DUSZEK, *Geometrycznie nieliniowa teoria konstrukcji sztywno-plastycznych*, Prace IPPT, **42**, 1975.
12. S. R. BODNER, P. S. SYMONDS, *Experiments on viscoplastic response of circular plates to impulsive loading*, J. Mech. Phys. Sol., **27**, 91-113, 1979.
13. D. POTTER, *Metody obliczeniowe fizyki*, PWN, Warszawa 1977.

#### РЕЗЮМЕ

#### ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕУПРУГИХ КРУГОВЫХ МЕМБРАН

Представлено численное моделирование динамики неупругой круговой мембраны, закрепленной по периметру, источником нагружения которой является детонация заряда взрывчатого вещества. Опираясь на упрощенной теории умеренно больших прогибов и допуская возможность изменения толщины мембраны, выведено нелинейное диффе-

ренциальное уравнение движения, которое решено методом конечных разностей. В рамках рассматриваемой теории исследованы времени-пространственные изменения функции прогиба, скорости прогиба, деформации и толщины мембраны. Обсуждено влияние ослабления мембраны, связанное с уменьшением ее толщины, материального упрочнения, а также вида начального условия на процесс движения мембраны. Показана необходимость учета также геометрического упрочнения. Представлен вывод о возможности использования исследуемых мембран в механических датчиках давления для измерения так амплитуды давления, как и времени его продолжительности.

#### SUMMARY

#### PRELIMINARY NUMERICAL MODELLING OF CIRCULAR INELASTIC MEMBRANE DYNAMICS

Numerical modelling of dynamic behaviour of circular inelastic membranes fixed at their peripheries is presented; their motion is provoked by detonation of explosives. Basing upon a simplified theory of moderately large deflections and allowing for possible thickness variations, a nonlinear equation of motion is derived and solved by the finite differences technique. Space-time variations of the deflection, deflection rate, strains and membrane thickness are analyzed. Effects connected with reduction of the thickness, material hardening and various initial conditions are discussed. The membranes may be applied in constructing the mechanical pressure indicators for measuring both the pressure amplitude and duration time.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

*Praca została złożona w Redakcji w dniu 12 maja 1986 r.*

---