

DRGANIA WYMUSZONE PŁYTY O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

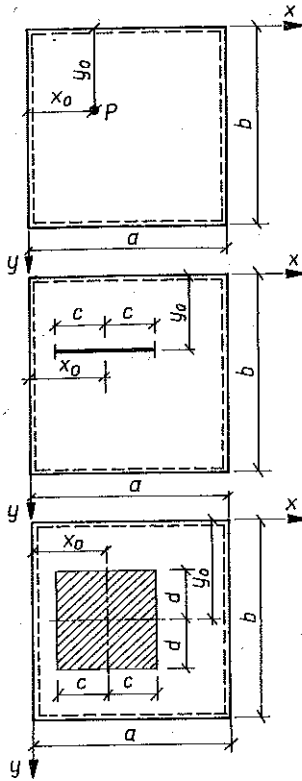
WACŁAW SZCZEŚNIAK (WARSZAWA)

W pracy analizowano drgania wymuszone płyty izotropowej o średniej grubości spełniającej warunki brzegowe swobodnego podparcia. Rozwiązanie polegało na wyznaczeniu trzech nieznanych funkcji w , χ_x , χ_y . Funkcje te spełniają równania różniczkowe odpowiednio czwartego i drugiego rzędu. Wyznaczono trzy pasma częstości drgań swobodnych. Wyniki rozwiązania podane zostały w formie podwójnych szeregów. Obciążenie ciągłe lub skupione jest harmoniczne lub nagle przyłożone do płyty. Analityczne wyniki rozwiązania zaprogramowano na mikrokomputer. Praca jest ilustrowana tablicami i rysunkami.

1. WSTĘP

Drgania wymuszone płyt o średniej grubości stały się w ostatnich latach przedmiotem badań wielu autorów w różnych ośrodkach. Stosunkowo największą liczbę prac stanowią pozycje dotyczące drgań owych płyt pod przesuwanymi się obciążeniami [1, 2 i 3]. W dostępnych opracowaniach nie znalazłem analizy dynamicznej płyty pod wpływem nagle przyłożonego obciążenia. Niniejsza praca jest propozycją wypełnienia tej luki. Rozpatrywać będziemy prostokątną płytę izotropową i jednorodną o stałej grubości h . Przyjmujemy warunki brzegowe swobodnego podparcia tzw. typu pierwszego [4]. W opracowaniu stosujemy w zasadzie teorię [5], modyfikując ją jednak przez wykorzystanie pracy [6]. Współczynnik ścianania κ w zastosowanej teorii wynosi $5/6$ i jest taki sam jak w pracy [8]. Krytyczny przegląd różnych teorii płyt o średniej grubości można znaleźć w pracy [7]. Zgodnie z rys. 1, rozpatrywać będziemy trzy przypadki obciążenia bezmasowego i pionowego. Wielkość obciążenia jest ustalona. W opracowaniu podano rozwiązanie dynamiczne płyty w przypadku obciążeń harmonicznych. Odpowiednie przejście graniczne pozwoli na analizę dynamiczną w przypadku nagłego przyłożenia obciążenia. Wprowadzając trzy nieznane funkcje w , χ_x , χ_y w wyniku założenia $u_z = w$, otrzymano dynamiczny układ równań różniczkowych cząstkowych zbliżony do układu równań teorii Ambarcumiana. Funkcje χ_x , χ_y odpowiednio wyskalowane, określają siły poprzeczne w płycie.

Naprężenia styczne możemy określić zakładając ich paraboliczny wykres na grubości płyty [11 i 12]:



Rys. 1. Współczynniki rozwinięcia obciążenia trzech typów obciążenia

$$q(x, y, t) = \sum_m \sum_n Q_{m,n}(t) f_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$f_{m,n} = \frac{4P}{ab} \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 3, 5 \dots;$$

$$f_{m,n} = \frac{4P}{\pi m c b} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0, \quad \bar{q}_0 = \frac{P}{2c}, \quad P = 2\bar{q}_0 c;$$

$$f_{m,n} = \frac{4P}{\pi^2 m n c d} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0, \quad P = 4q_0 c d, \quad q_0 = \frac{P}{4cd}.$$

$$(1.1) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix}.$$

Odpowiednie jednostkowe odkształcenia postaciowe wyrazimy wzorami

$$(1.2) \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix}.$$

W pracy uwzględnimy wpływ naprężenia σ_z . Zakładamy, że obciążenie znajduje się na górnej powierzchni płyty. W przypadku zagadnienia statycznego naprężenia σ_z są takie same jak w klasycznej teorii płyt Kirchhoffa-Love'a (praca REISSNERA i autora [3]),

$$(1.3) \quad \sigma_z = -\frac{q}{2} \left(1 - 3 \frac{z}{h} + 4 \frac{z^3}{h^3} \right).$$

W proponowanym opracowaniu postąpimy inaczej. Wykorzystując trzecie równanie równowagi dynamicznej

$$(1.4) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

otrzymamy w wyniku podstawienia (1.1) i (1.4) i scałkowaniu względem grubości płyty

$$(1.5) \quad D \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = q(x, y, t).$$

W przypadku obciążenia dynamicznego płyty naprężenia σ_z można określić z (1.4). Przy braku składowych obciążeń stycznych naprężenia te są określone w sposób następujący:

$$(1.6) \quad \sigma_z = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{zh^2}{4} \right) \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) + z\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(x, y).$$

Stałą funkcję całkowania określamy wykorzystując warunki brzegowe na górnej i dolnej powierzchni płyty:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} z = \frac{h}{2}, \quad \sigma_z &= V_z^+, \\ z = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_z &= -V_z^-, \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad f(x, y) = \frac{V_z^+ - V_z^-}{2}$$

Przy obciążeniu q występującym tylko na górnej powierzchni płyty naprężenia σ_z są określone wzorem następującym:

$$(1.9) \quad \sigma_z = -\frac{q}{2} - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{zh^2}{4} \right) \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) + z\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Równania fizyczne liniowej teorii sprężystości napiszemy w postaci mieszanej:

$$(1.10) \quad \varepsilon_z = \sigma_z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} - \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x). \end{aligned}$$

Założenie Ambarcumiana odnośnie do pomieszczeń u_z i w jest następujące:

$$(1.11) \quad u_z = w, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Kąty odkształcenia postaciowego wyznaczone z zależności geometrycznych są

$$(1.12) \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Po porównaniu (1.2) i (1.12) oraz wykorzystaniu (1.1) otrzymamy

$$(1.13) \quad \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \bar{\psi}(z) \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix},$$

gdzie

$$\bar{\psi}(z) = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{zh^2}{4} \right).$$

Z równań (1.13) wynika, że przemieszczenia u_x i u_y są funkcjami x , y , z i zmieniają się nieliniowo wzdłuż grubości płyty. Wykorzystując (1.13), podstawowe składowe naprężeń wyrazimy wzorami

$$(1.14) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{Bmatrix} + \bar{\psi}(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \right\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{\psi}(z) \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) \right].$$

Siły wewnętrzne w płycie są określone w sposób następujący:

$$(1.15) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = -D \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{Bmatrix} - \frac{Dh^2}{5(1-\nu)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \end{Bmatrix} +$$

$$(1.15) \quad + A_0 \left\{ \frac{Dh^2}{10} \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

[cd.]

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{Dh^2}{10} \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right),$$

$$Q_x = -D\chi_x, \quad Q_y = -D\chi_y,$$

gdzie

$$A_0 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

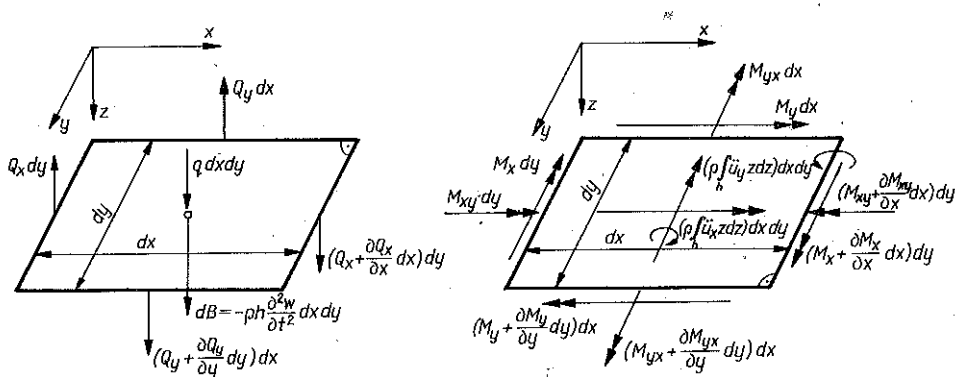
2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI DYNAMICZNEJ PŁYTY. DRGANIA SWOBODNE

Zgodnie z rys. 2, możemy określić trzy równania równowagi dynamicznej płyty:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0,$$

$$(2.1) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x - \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{u}_x z dz = 0,$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{u}_y z dz = 0.$$



Rys. 2

Wykorzystując wzory (1.13) i (1.15), równania (2.1) po prostych przekształceniach redukujemy do dwóch cząstkowych równań różniczkowych:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3 (17-6\nu)}{60D(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \\ = \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \end{aligned}$$

lub

$$\frac{2}{5} D(1-\nu) \left(\nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi \right) - \frac{\rho h^3}{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie

$$\psi = \frac{\partial \chi_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi_y}{\partial x}.$$

Równania (2.2) dla przypadku statycznego redukują się odpowiednio i są takie same jak w pracy REISSNERA [8]. Przyjęcie naprężeń σ_z według wzoru (1.3) zmienia nieznacznie równanie (2.2)₁:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3 (17-5\nu)}{60D(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \\ = \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia $c_p^2 = E/\rho(1-\nu^2)$ i $c_s^2 = 5G/6\rho$ gdzie c_p i c_s oznaczają prędkości fali w płycie [9 i 10], równanie (2.3) możemy przedstawić w postaci falowej:

$$(2.4) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D} - \frac{\nabla^2 q}{D} + \frac{1}{\rho c_p^2 c_s^2 h} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2},$$

gdzie $\bar{D} = \kappa Gh$.

Funkcje χ_x , χ_y , ψ , w i q są ze sobą związane równaniami

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \nabla^2 \chi_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{q}{D} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\nabla^2 \chi_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{D} - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Przy założeniu, że $q = 0$ równania (2.2) lub (2.3) i (2.4) określają drgania swobodne płyty. Warunki brzegowe rozpatrywanej płyty mogą być następujące:

$$(2.6) \quad \begin{array}{l} x = 0 \quad \text{i} \quad x = a, \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad \chi_y = 0, \\ y = 0 \quad \text{i} \quad y = b, \quad w = 0, \quad M_y = 0, \quad \chi_x = 0. \end{array}$$

Warunki brzegowe są spełnione, jeśli za funkcje w i ψ obierzemy następujące:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_m \sum_n A_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \cos \omega_{m,n} t, \\ \psi(x, y, t) &= \sum_m \sum_n B_{m,n} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \cos \omega_{m,n} t, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$, $m, n = 1, 3, 5, \dots$

Wprowadzamy pewne wielkości bezwymiarowe $\lambda = a/b$ i $\xi = h/a$:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \gamma_{m,n}^2 &= h^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2) = \pi^2 \xi^2 (m^2 + \lambda^2 n^2), \\ \gamma_{m,n}^2 &= \gamma_m^2 + \bar{\gamma}_n^2, \quad \gamma_m^2 = \alpha_m^2 h^2, \quad \bar{\gamma}_n^2 = \beta_n^2 h^2. \end{aligned}$$

Podstawienie (2.7) do (2.2) oraz wykorzystanie (2.8) doprowadza do trzech częstości drgań swobodnych płyty o średniej grubości:

$$(2.9) \quad \omega_{m,n}^{(1,3)} = \frac{\omega_{m,n}^{(kl)}}{\gamma_{m,n}^2} \left\{ \frac{1}{2} [P_{m,n} \mp (P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$(2.10) \quad \omega_{m,n}^{(2)} = \frac{\omega_{m,n}^{(kl)}}{\gamma_{m,n}^2} [6(1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

W równaniach (2.9) i (2.10) $P_{m,n}$ i $Q_{m,n}$ są wyrażeniami skracającymi zapis

$$(2.11) \quad P_{m,n} = 60(1-\nu) + (17-6\nu)\gamma_{m,n}^2, \quad Q_{m,n} = 4\gamma_{m,n}^2 [15(1-\nu)]^{\frac{1}{2}}.$$

$\omega_{m,n}^{(kl)}$ oznacza częstość kołową płyty prostokątnej obliczanej według teorii klasycznej:

$$(2.12) \quad \omega_{m,n}^{(kl)} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{\pi^2 \xi}{a} (m^2 + \lambda^2 n^2) \frac{c_p}{\sqrt{12}} = \\ = \frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{a \xi \sqrt{12}} = \frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h \sqrt{12}}.$$

Wzór (2.9) jest związany z równaniem (2.2)₁, wzór (2.10) zaś z równaniem (2.2)₂. Warto zwrócić uwagę, że częstość $\omega_{m,n}^{(2)}$ określa drgania, dla których $w = 0$. Między częstościami $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ zachodzą związki [10 i 20]

$$\omega_{m,n}^{(1)} < \omega_{m,n}^{(2)} < \omega_{m,n}^{(3)}.$$

W pracy autora [6] analizowano przebiegi pierwszej i trzeciej częstości drgań swobodnych płyty kwadratowej jako funkcji różnych parametrów geometrycznych i materiałowych.

3. DRGANIA PŁYTY WYWOŁANE OBCIĄŻENIEM HARMONICZNYM

Zgodnie z rys. 1 rozpatrywać będziemy trzy typy obciążenia, które możemy przedstawić w formie

$$(3.1) \quad q(x, y, t) = q(x, y) \sin pt.$$

Ociążenie (3.1) rozkładamy w podwójny szereg (3.2). Odpowiednie współczynniki rozwinięcia określamy dla trzech typów obciążenia wzorami (3.3)

$$(3.2) \quad q(x, y, t) = \sin pt \sum_m \sum_n f_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$f_{m,n} = \frac{4P}{\pi^2 mncd} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b},$$

$$P = q \cdot 2c \cdot 2d,$$

$$(3.3) \quad f_{m,n} = \frac{4P}{\pi mcb} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}, \quad P = q \cdot 2c,$$

$$f_{m,n} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}.$$

Odpowiednie operatory różniczkowe występujące po prawej stronie równania (2.2)₁ dla poszczególnych typów obciążeń mają postać

$$(3.4) \quad \nabla^2 q(x, y, t) = \sin pt \sum_m \sum_n [-f_{m,n} (\alpha_m^2 + \beta_n^2)] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$\frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial t^2} = -p^2 \sin pt \sum_m \sum_n f_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

$q(x, y, t)$ określone jest wzorem (3.2), $f_{m,n}$ wzorami (3.3) dla kolejnych typów obciążeń z rys. 1.

Będziemy poszukiwać rozwiązania równania (2.2)₁ w postaci podwójnego szeregu:

$$(3.5) \quad w(x, y, t) = \sum_m \sum_n T_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Podstawienie tego ostatniego do (2.2)₁ doprowadza do niejednorodnego równania różniczkowego, zwyczajnego czwartego rzędu na nieznaną funkcję $T_{m,n}$:

$$(3.6) \quad \ddot{T}_{m,n}(t) + \frac{P_{m,n}}{12} \left(\frac{c_p}{h} \right)^2 \ddot{T}_{m,n}(t) + \frac{5(1-\nu)}{12} \left(\frac{c_p \gamma_{m,n}}{h} \right)^4 T_{m,n}(t) = \\ = \frac{f_{m,n}}{2\varrho h^3} \{c_p^2 [10(1-\nu) + (2-\nu)\gamma_{m,n}^2] - 2p^2 h^2\} \sin pt.$$

Całkę szczególną równania (3.6) znajdujemy np. sposobem porównywań odpowiednich funkcji

$$(3.7) \quad T_{m,n}^s(t) = C_{1m,n} \sin pt + C_{2m,n} \cos pt,$$

gdzie

$$C_{1m,n} = \frac{6f_{m,n} h \{c_p^2 [10(1-\nu) + \gamma_{m,n}^2 (2-\nu)] - 2p^2 h^2\}}{\varrho [12p^4 h^4 - p^2 h^2 c_p^2 P_{m,n} + 5(1-\nu) c_p^4 \gamma_{m,n}^4]}, \quad C_{2m,n} = 0.$$

Stałą $C_{1m,n}$ możemy napisać również w formie

$$(3.8) \quad C_{1m,n} = \frac{f_{m,n}}{\varrho h} \frac{(\bar{\omega}_{m,n}^{(2)})^2 - p^2}{[p^2 - (\omega_{m,n}^{(1)})^2] [p^2 - (\omega_{m,n}^{(3)})^2]},$$

gdzie

$$(3.9) \quad \bar{\omega}_{m,n}^{(2)} = \frac{c_p}{h} \left\{ \frac{1}{2} [10(1-\nu) + (2-\nu)\gamma_{m,n}^2] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{\omega}_{m,n}^{(2)} \neq \omega_{m,n}^{(2)}.$$

Całkę ogólną równania (3.6) możemy przedstawić w postaci

$$(3.10) \quad T_{m,n}^0(t) = A \cos \omega_{m,n}^{(1)} t + B \sin \omega_{m,n}^{(1)} t + C \cos \omega_{m,n}^{(3)} t + \tilde{D} \sin \omega_{m,n}^{(3)} t,$$

gdzie $\omega_{m,n}^{(1)(3)}$ oznaczają częstotliwości drgań swobodnych płyty.

Rozwiązanie całkowite składa się z sumy całki ogólnej i szczególnej:

$$(3.11) \quad T_{m,n}(t) = T_{m,n}^s(t) + T_{m,n}^0(t).$$

Nieznane stałe $A - \tilde{D}$ należy określić z warunków początkowych zadania granicznego. Warunki początkowe powinny zapewniać stan równowagi płyty w chwili $t = 0$. Naturalnymi warunkami początkowymi w zagadnieniu granicznym płyty o średniej grubości są zerowe wartości przemieszczeń i ich prędkości w chwili $t = 0$:

$$(3.12) \quad w(x, y, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \\ \chi_i(x, y, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi_i(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad i = x, y.$$

Ostatnie cztery warunki możemy odpowiednio zastąpić

$$\vartheta_i(x, y, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta_i(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad \text{lub} \quad \beta_i(x, y, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \beta_i(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

W równaniach (3.12) wprowadzono za monografią [13] uśrednione przemieszczenia kątowe $\vartheta_i(x, y, t)$ i $\beta_i(x, y, t)$. Uśrednione kąty β_x i β_y zależą wprost od funkcji χ_x i χ_y :

$$(3.13) \quad \begin{cases} \beta_x \\ \beta_y \end{cases} = -\frac{h^2}{5(1-\nu)} \begin{cases} \chi_x \\ \chi_y \end{cases}.$$

Uśrednione kąty $\vartheta_i(x, y, t)$ i $\beta_i(x, y, t)$ są powiązane równaniem więzów geometrycznych

$$(3.14) \quad \vartheta_i = -\frac{\partial w}{\partial i} + \beta_i, \quad i = x, y.$$

Warunki początkowe typu (3.12) są konieczne w rozpatrywanym zagadnieniu, ale nie wystarczające ze względu na rząd równania różniczkowego (2.2)₁. Konieczne jest w tym przypadku poprawne zdefiniowanie dodatkowych, uzupełniających warunków początkowych [1, 2]. Uzupełniające warunki początkowe wynikają z faktu, że w chwili $t=0$ należy spełnić równanie różniczkowe (2.2)₁ lub (2.3). W równaniach tych, zgodnie z warunkiem (3.12)₁, pomijamy pochodne geometryczne ugięcia, a w szczególności $\nabla^4 w$. Ostatecznie dwa uzupełniające warunki początkowe utożsamiamy z równaniem równowagi i jego pochodną względem czasu dla chwili $t=0$:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} & \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3(17-5\nu)}{60(1-\nu)D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \\ & = \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad \text{dla } t=0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3(17-5\nu)}{60(1-\nu)D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right] \Big|_{t=0} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right] \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Jak się można przekonać, warunki (3.12) i równania (3.15) doprowadzają w tym szczególnym przypadku obciążenia do rozwiązania dynamicznego identycznego z rozwiązaniem przy warunkach (3.12)₁ i tzw. zerowych warunkach początkowych wyższego rzędu (3.16):

$$(3.16) \quad \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = 0.$$

W przypadku klasycznej teorii płyt cienkich zagadnienie dynamiczne opisane jest równaniem

$$(3.17) \quad \nabla^2(\nabla^2 w(x, y, t)) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{q(x, y, t)}{D}.$$

W chwili $t = 0$, $\nabla^4 w = 0$ równanie różniczkowe jest następujące:

$$(3.18) \quad \left. \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \frac{q(x, y, 0)}{\rho h}.$$

Ostatnie równanie oznacza skok przyspieszenia w chwili $t = 0$. Istotnie, wykorzystując znane rozwiązania na przykład dla płyty cienkiej nagle obciążonej siłą skupioną (wzór 16 na s. 299, w: Dynamika budowli, W. Nowacki, Arkady, Warszawa 1972) możemy potwierdzić poprawność równań (3.18). Równanie (3.18) jest rzadko stosowane jako uzupełniający warunek początkowy w klasycznej teorii płyt ze względu na rząd równania różniczkowego (3.17) względem czasu. Wystarczają tutaj w zupełności warunki (3.12)₁. Korzystając ostatecznie z warunków (3.12) i (3.15) lub (3.12)₁ i (3.16) możemy jednoznacznie określić stałe A , B , C i \tilde{D} :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} A &= C = 0, \\ B &= C_{1,m,n} \frac{p(p^2 - \omega_3^2)}{\omega_1(\omega_3^2 - \omega_1^2)}, \quad \tilde{D} = C_{1,m,n} \frac{p(\omega_1^2 - p^2)}{\omega_3(\omega_3^2 - \omega_1^2)}, \end{aligned}$$

gdzie dla skrócenia zapisu przyjęto $\omega_1 = \omega_{m,n}^{(1)}$, $\omega_3 = \omega_{m,n}^{(3)}$, $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_{m,n}^{(2)}$. Ostatecznie rozwiązanie dynamiczne równania (2.2)₁ jest następujące:

$$(3.20) \quad w(x, y, t) = \frac{1}{\rho h} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n}(\bar{\omega}_2^2 - p^2)}{(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_3^2)} \times \\ \times \left[\sin pt + \frac{p(p^2 - \omega_3^2)}{\omega_1(\omega_3^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t + \frac{p(\omega_1^2 - p^2)}{\omega_3(\omega_3^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe (3.21) rozwiązanie powyższe możemy napisać w postaci bezwymiarowej pod szeregiem z wymiarowym czynnikiem przed znakiem podwójnych szeregów:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_{kl}}, \quad \Omega_3 = \frac{\omega_3}{\omega_{kl}}, \quad \bar{\Omega}_2 = \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{kl}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\omega_{kl}}, \quad \bar{\Omega}_2 \neq \Omega_2, \\ \Omega_{1,3} &= \frac{1}{\gamma_{m,n}^4} \left\{ \frac{1}{2} [P_{m,n} \mp (P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}, \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega}_2^2 = \frac{6}{\gamma_{m,n}^4} [10(1 + \nu) + (2 - \nu)\gamma_{m,n}^2],$$

$$(3.22) \quad w(x, y, t) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n}(\bar{\Omega}_2^2 - \bar{p}^2)}{\gamma_{m,n}^4 (\bar{p}^2 - \Omega_1^2)(\bar{p}^2 - \Omega_3^2)} \times \\ \times \left[\sin pt + \frac{\bar{p}(\bar{p}^2 - \Omega_3^2)}{\Omega_1(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)} \sin \omega_1 t + \frac{\bar{p}(\bar{p}^2 - \Omega_1^2)}{\Omega_3(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)} \sin \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Dla identycznej płyty obciążonej statycznie otrzymamy

$$(3.23) \quad w(x, y) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n}}{\gamma_{m,n}^4} \left[1 + \frac{(2-\nu) \gamma_{m,n}^2}{10(1-\nu)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

lub

$$(3.23') \quad w(x, y) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} \bar{\Omega}_2^2}{\gamma_{m,n}^4 \Omega_1^2 \Omega_3^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Rozwiązanie dynamiczne (3.20) traci sens przy $p = \omega_i$, $i = 1, 3$. Po odpowiednim przejściu granicznym otrzymamy rozwiązanie dla tego interesującego przypadku

$$(3.24) \quad w(x, y, t) = \frac{1}{2Qh} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} (\bar{\omega}_2^2 - p_i^2)}{p_i [2p_i^2 - (\omega_1^2 + \omega_3^2)]} \times \\ \times \left[t \cos p_i t + \frac{3p_i^2 - \omega_3^2}{\omega_1 (\omega_3^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1^2 - 3p_i^2}{\omega_3 (\omega_3^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Jak wynika z rozwiązania (3.24) amplituda ugięcia płyty dąży do odpowiednio dużej wartości narastając systematycznie podczas działania tego szczególnego typu obciążenia. Zjawisko ruchu płyty ma w tym przypadku charakter rezonansowy. Rozwiązanie staje się zerem w przypadku gdy $\bar{\omega}_2 = p$. Znajomość ugięć oraz wykorzystanie warunków początkowych (3.12)₁ zezwala na obliczenie nieznanymi funkcji χ_x i χ_y , a w konsekwencji dynamicznych sił wewnętrznych i naprężeń. Rozwiązanie (3.20) lub (3.23) można uzależnić od konkretnych wartości współczynników rozwinięcia $f_{m,n}$ obciążenia w szereg. Te szczególne rozwiązania podano w tablicach w przykładzie obliczeniowym.

4. OBCIĄŻENIA HARMONICZNE TYPU $q(x, y, t) = q(x, y) \cos pt$

W tym przypadku obciążenia wszystkie wzory (3.1) do (3.18) pozostają takie same pod warunkiem zamiany $\sin pt$ na $\cos pt$ i $C_{1m,n}$ na $C_{2m,n}$. Uwzględniając warunki początkowe (3.12)₁ oraz równania równowagi dla płyty w chwili $t = 0$ (3.15) lub (3.16), otrzymamy następujące wzory na stałe A , B , C i \bar{D} w rozwiązaniu (3.11):

$$(4.1) \quad A = \frac{h^4}{D} \frac{f_{m,n} (\bar{\Omega}_2^2 - \bar{p}^2)}{\gamma_{m,n}^4 (\bar{p}^2 - \Omega_1^2) (\bar{p}^2 - \Omega_3^2)} \frac{\bar{p}^2 - \Omega_3^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}, \\ B = \bar{D} = 0, \\ C = -\frac{h^4}{D} \frac{f_{m,n} (\bar{\Omega}_2^2 - \bar{p}^2)}{\gamma_{m,n}^4 (\bar{p}^2 - \Omega_1^2) (\bar{p}^2 - \Omega_3^2)} \frac{\bar{p}^2 - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}.$$

Ostateczne rozwiązanie dla tego przypadku obciążenia w wymiarowych i bezwymiarowych wielkościach jest następujące:

$$(4.2) \quad w(x, y, t) = \frac{1}{\rho h} \sum_m \sum_n f_{m,n} \left\{ \frac{\bar{\omega}_2^2 - p^2}{(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_3^2)} \left[\cos pt + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega_3^2 - p^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_1 t + \frac{p^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \right\} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$(4.3) \quad w(x, y, t) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} (\bar{\Omega}_2^2 - \bar{p}^2)}{\gamma_{m,n}^4 (\bar{p}^2 - \Omega_1^2) (\bar{p}^2 - \Omega_3^2)} \left[\cos pt + \right. \\ \left. + \frac{\bar{p}^2 - \Omega_3^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2} \cos \omega_1 t - \frac{\bar{p}^2 - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2} \cos \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Jak łatwo zauważyć, rozwiązania (4.2) i (4.3) różnią się innymi współczynnikami przed funkcjami $\cos \omega_i t$ i $\sin \omega_i t$ od rozwiązań (3.20) i (3.22).

W przypadku rezonansu mechanicznego rozwiązanie (4.2) ma postać

$$(4.4) \quad w(x, y, t) = \frac{1}{2\rho h} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} (\bar{\omega}_2^2 - p_i^2)}{p_i [2p_i^2 - (\omega_1^2 + \omega_3^2)]} \left[-t \sin p_i t - \right. \\ \left. - \frac{2p_i}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_1 t + \frac{2p_i}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ i = 1, 3, \quad p_i = \omega_i.$$

5. DRGANIA PŁYTY O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

WYWOŁANE NAGLE PRZYŁOŻONYM OBCIĄŻENIEM⁽¹⁾

Rozwiązanie problemu można uzyskać na dwóch niezależnych drogach. Pierwszy sposób polega na wykorzystaniu rozwiązania (4.2) lub (4.3) poprzedniego rozdziału niniejszej pracy. Jeśli założyć, że $p = 0$, to po prostym przejściu granicznym otrzymujemy przypadek nagłego, raptownego przyłożenia obciążenia na rozpatrywaną płytę. Takie postępowanie można znaleźć w monografii S. TIMOSHENKI [14] na str. 435 w odniesieniu do drgań wymuszonych membrany. Drugi sposób postępowania polega na rozwiązaniu bezpośrednim równania różniczkowego (2.2)₁. W tym przypadku należy wykorzystać cytowane już warunki początkowe (3.12) i równania (3.15) lub (3.16) dla $t = 0$ oraz odpowiednio zdefiniować funkcje Heaviside'a, od której zależy obciążenie. We wszystkich znanych autorowi rozwiązaniach tego zagad-

⁽¹⁾ Jedną z pierwszych prac poświęconych tej tematyce w odniesieniu do klasycznej teorii płyt była pozycja Z. MAZURKIEWICZA i M. ŻÓRAWSKIEGO [21].

nienia w przypadku układów o skończonej liczbie stopni swobody, prętów, membran i płyt cienkich obciążenie jest definiowane w postaci następującej:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} q(x, y, t) &= q(x, y) H(t) = 0 && \text{dla } t < 0, \\ q(x, y, t) &= q(x, y) H(t) = q(x, y) && \text{dla } t > 0. \end{aligned}$$

Konsekwencją powyższego jest przyjęcie w równaniu (2.2) $\partial^2 q / \partial t^2 = 0$ dla $t > 0$. Tylko takie postępowanie doprowadza do identycznych wyników rozwiązania według opisanych wyżej obu sposobów. Ostatecznie oba podejścia prowadzą do następującego rozwiązania

$$(5.2) \quad w(x, y, t) = \frac{1}{\rho h} \sum_m \sum_n f_{m,n} \left\{ \frac{\bar{\omega}_2^2}{\omega_1^2 \omega_3^2} \left[1 + \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_1 t - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \right\} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

lub

$$(5.3) \quad w(x, y, t) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} \bar{\Omega}_2^2}{\gamma_{m,n}^4 \Omega_1^2 \Omega_3^2} \left[1 + \frac{\Omega_3^2}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} \cos \omega_1 t - \right. \\ \left. - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

W literaturze [15] spotyka się rozwiązania belki Timoshenki przy następujących uzupełniających warunkach:

$$(5.4) \quad \left. \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \frac{q(x, y, 0)}{\rho h}, \\ \left. \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial t^3} \right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q(x, y, t)}{\rho h} \right) \Big|_{t=0},$$

zdaniem autora poprawnych w klasycznej teorii belek i płyt cienkich oraz płyt o średniej grubości i bez udziału wpływu bezwładności obrotowej na jej ugięcia. Jeżeli jednak dopuścić ich przyjęcie w rozpatrywanym zadaniu płyty o średniej grubości lub belki Timoshenki (oczywiście nie spełniony w chwili $t=0$ w takim przypadku równania różniczkowego (2.2)₁), to otrzymamy rozwiązanie

$$(5.5) \quad \bar{w}(x, y, t) = \frac{1}{\rho h} \sum_m \sum_n f_{m,n} \left\{ \frac{\bar{\omega}_2^2}{\omega_1^2 \omega_3^2} \left[1 + \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_1 t - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] + \frac{\cos \omega_3 t - \cos \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \right\} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Rozwiązanie (5.5) zawiera rozwiązanie (5.2), dodatkowo jest tu również składnik wynikający ze spełnienia równań (5.4). Jak wykazały przeliczenia porównawcze, wpływ tego ostatniego na wyniki ostateczne rozwiązania jest minimalny.

6. OKREŚLENIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH W PŁYTCIE O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

Do pełnego rozwiązania problemu dynamicznego płyty o średniej grubości potrzebne jest również określenie funkcji χ_x i χ_y , aby w konsekwencji wyznaczyć dynamiczne naprężenia i siły wewnętrzne niezbędne w wymiarowaniu. Nieznane funkcje χ_x i χ_y można uzależnić bezpośrednio od dynamicznego ugięcia w , wykorzystując odpowiednio w tym celu równania równowagi (2.3) lub (2.2). Po nietrudnych przekształceniach równania te możemy napisać w formie macierzej

$$(6.1) \quad \left[\nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \left[-\frac{10}{h^2} \nabla^2 w + \frac{11\rho h}{(1-\nu)6D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q}{D(1-\nu)} \right].$$

Jeśli naprężenia σ_z określimy sposobem statycznym (wzór (1.3)) ulega zmianie współczynnik $11\rho h/6D(1-\nu)$ przybierając wartość $(11+\nu)\rho h/6D(1-\nu)$. Przyjęcie rozwiązania układu równań (6.1) w postaci podwójnych szeregów cosinusowo-sinusowych (6.2) doprowadza do rozdzielenia zmiennych i w konsekwencji do dwóch zwyczajnych równań różniczkowych, niejednorodnych na wyznaczenie nieznanymi funkcji $\phi_{m,n}(t)$ i $A_{m,n}(t)$:

$$(6.2) \quad \chi_x(x, y, t) = \sum_m \sum_n \phi_{m,n}(t) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \chi_y(x, y, t) = \sum_m \sum_n A_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y.$$

Nieznane funkcje czasu $\phi_{m,n}(t)$ i $A_{m,n}(t)$ spełniają równania

$$(6.3) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_2^2 \right] \begin{Bmatrix} \phi_{m,n} \\ A_{m,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_m \\ \beta_n \end{Bmatrix} \frac{c_p^2(1-\nu)}{2} \left[\frac{10\gamma_{m,n}^2}{h^4} T_{m,n} + \right. \\ \left. + \frac{22}{c_p^2 h^2 (1-\nu)} \ddot{T}_{m,n} - \frac{f_{m,n}}{D(1-\nu)} \right],$$

gdzie $T_{m,n}$ jest określone wzorem (6.4) wynikającym z (5.2)

$$(6.4) \quad T_{m,n}(t) = \frac{1}{\rho h} f_{m,n} \frac{\bar{\omega}_2^2}{\omega_1^2 \omega_3^2} \left[1 + \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_1 t - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t \right].$$

Rozwiązanie równań (6.3), przy wykorzystaniu warunków początkowych (3.12)₂ przedstawimy w formie macierzowej

$$(6.5) \quad \begin{Bmatrix} \phi_{m,n} \\ A_{m,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_m \\ \beta_n \end{Bmatrix} (E_0 + E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t + E_3 \cos \omega_3 t),$$

gdzie stałe E_0 , E_1 , E_2 i E_3 są określone wzorami

$$(6.6) \quad E_0 = \frac{h^2 f_{m,n}}{D \gamma_{m,n}^2}, \quad E_1 = \frac{h^2 f_{m,n} \bar{\Omega}_2^2}{D \gamma_{m,n}^2 (\Omega_1^2 - \Omega_3^2)}, \quad E_2 = -E_0, \quad E_3 = -E_1.$$

Znając rozwiązanie na χ_x i χ_y , a także na ugięcie w , możemy określić siły wewnętrzne i naprężenia w dowolnym punkcie płyty i w dowolnej chwili czasu $t_i > 0$. Wymiarem funkcji χ_x i χ_y jest $[1/m^2]$. Korzystając z definicji (1.15) możemy wyliczyć np. momenty zginające M_x i M_y lub moment skręcający M_{xy} . Przykładowo moment zginający M_x jest określony w następujący sposób:

$$(6.7) \quad M_x = h^2 \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} \bar{\Omega}_2^2}{\gamma_{m,n}^4 \Omega_1^2 \Omega_3^2} (\gamma_m^2 + \nu \bar{\gamma}_n^2) (S_0 + S_1 \cos \omega_1 t + S_2 \cos \omega_2 t + S_3 \cos \omega_3 t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Bezwymiarowe stałe S_0 , S_1 , S_2 i S_3 są określone wzorami

$$(6.8) \quad S_0 = 1 + \frac{6\Gamma_1^2}{\gamma_{m,n}^2 \bar{\Omega}_2^2}, \quad S_1 = \frac{\Omega_3^2 + \Gamma_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2}, \quad S_2 = 1 - S_0, \quad S_3 = -1 - S_1,$$

gdzie

$$\Gamma_1^2 = \Gamma_{1,m,n}^2 = \frac{(2-\nu) \gamma_m^2 + \nu \bar{\gamma}_n^2}{\gamma_m^2 + \nu \bar{\gamma}_n^2}, \quad \Gamma_2^2 = \Gamma_{2,m,n}^2 = \frac{12(1-\nu) \gamma_m^2 + \nu \gamma_{m,n}^2}{\gamma_{m,n}^2 (\gamma_m^2 + \nu \bar{\gamma}_n^2)}.$$

We wzorach (6.6) i (6.8) wykorzystano oczywiste zależności między Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 i $\bar{\Omega}_2$:

$$(6.8) \quad \begin{aligned} Q_{m,n}^2 &= 240(1-\nu) \gamma_{m,n}^4, & \Omega_{1,3}^2 &= \frac{1}{2\gamma_{m,n}^4} (P_{m,n} \mp \sqrt{P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2}), \\ \frac{\bar{\Omega}_2^2}{\Omega_1^2 \Omega_3^2} &= 1 + \frac{(2-\nu) \gamma_{m,n}^2}{10(1-\nu)}, & \Omega_1^2 \Omega_3^2 &= \frac{60(1-\nu)}{\gamma_{m,n}^4}, & \bar{\Omega}_2^2 - \Omega_2^2 &= \frac{6}{\gamma_{m,n}^2}, \\ \Omega_2^2 &= \frac{60(1-\nu)}{\gamma_{m,n}^4} + \frac{6(1-\nu)}{\gamma_{m,n}^2}, & \Omega_1^2 + \Omega_3^2 &= \frac{60(1-\nu)}{\gamma_{m,n}^4} + \frac{6(1-\nu)}{\gamma_{m,n}^2} + \frac{11}{\gamma_{m,n}^2}, \\ \bar{\Omega}_2^2 &= \frac{60(1-\nu)}{\gamma_{m,n}^4} + \frac{6(2-\nu)}{\gamma_{m,n}^2}, & \Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 &= \frac{11}{\gamma_{m,n}^2}, \\ \Omega_2^2 - \Omega_1^2 \Omega_3^2 &= \frac{6(1-\nu)}{\gamma_{m,n}^2}. \end{aligned}$$

We wzorach (6.8) wprowadzono wszystkie wielkości jako bezwymiarowe wykorzystując $\Omega_i = \omega_i/\omega_{kl}$, $i = 1, 2, 3$ oraz $c_p^2/h^2 = 12\omega_{kl}^2/\gamma_{m,n}^4$. Analogicznie rozumując, określimy dynamiczne momenty zginające dla płyty cienkiej obciążonej nagle i dynamicznie w ramach klasycznej teorii technicznej

$$(6.9) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = h^2 \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n}}{\gamma_{m,n}^4} \begin{Bmatrix} \gamma_m^2 + v\bar{\gamma}_n^2 \\ \bar{\gamma}_n^2 + v\gamma_m^2 \end{Bmatrix} (1 - \cos \omega_{kl} t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Statyczne momenty zginające odpowiednio dla płyty o średniej grubości i płyty cienkiej obliczanej klasycznie są określone następującymi wzorami:

$$(6.10) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = h^2 \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} \tilde{S}_0}{\gamma_{m,n}^4} \begin{Bmatrix} \gamma_m^2 + v\bar{\gamma}_n^2 \\ \bar{\gamma}_n^2 + v\gamma_m^2 \end{Bmatrix} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

$$\text{gdzie } \tilde{S}_0 = S_0 \frac{\bar{\Omega}_2^2}{\Omega_1^2 \Omega_3^2},$$

$$(6.11) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = h^2 \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n}}{\gamma_{m,n}^4} \begin{Bmatrix} \gamma_m^2 + v\bar{\gamma}_n^2 \\ \bar{\gamma}_n^2 + v\gamma_m^2 \end{Bmatrix} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

7. REDUKCJA UKŁADU RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

W tym rozdziale zredukujemy układ równań (2.1) do przypadku płyty Timoshenki, Rayleigha i Flüggego. Pomijając w równaniach (2.1) efekt bezwładności obrotowej, otrzymamy równanie różniczkowe cząstkowe płyty z uwzględnieniem poprawki na ściananie:

$$(7.1) \quad \nabla^4 w - \frac{\rho h^3}{5D(1-\nu)} \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D} - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \nabla^2 q.$$

Równanie (2.2) i (6.1) nie ulega zmianie. W równaniu (7.1) pominięto wpływ naprężeń σ_z na odkształcenia płyty, przyjmując że, $A_0 = 0$. W chwili $t = 0$, równanie (7.1) przybiera postać

$$(7.2) \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{q}{\rho h} \right|_{t=0},$$

tak samo, jak dla płyty cienkiej.

Pomijając założenie Timoshenki w równaniach (2.1) otrzymujemy rozwiązanie Rayleigha uwzględniając efekt bezwładności obrotowej przekroju poprzecznego płyty:

$$(7.3) \quad \nabla^4 w - \frac{\rho h^3}{12D} \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D}.$$

Dla $t = 0$ równanie (7.3) redukuje się do równania

$$(7.4) \quad \left(1 - \frac{h^2}{12} \nabla^2\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{q}{\rho h} \Big|_{t=0}$$

W tym przypadku brak jest równań (2.2) i (6.1), gdyż $\chi_x = \chi_y = 0$. Siły poprzeczne są określone następująco:

$$(7.5) \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = - \left\{ DV^2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right\} w.$$

Ugięcie płyty o średniej grubości (2.2)₁ możemy napisać w postaci sumy dwu składników:

$$(7.6) \quad w = w_g + w_t.$$

Pomijając zupełnie efekt zginania w płycie $w_g = 0$, otrzymamy tzw. równanie FLÜGGEGO [18] określające drgania płyty, uwzględniające tylko ścinanie:

$$(7.7) \quad -\frac{\rho h^3}{5D(1-\nu)} \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} = \frac{q}{D} - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \nabla^2 q.$$

W monografii L. H. DONNELLA [19] można znaleźć prostą zależność między ugięciem w_g i w_t :

$$(7.8) \quad w_t = \left[1 - \frac{(8-3\nu)h^2}{40(1-\nu)} \nabla^2 \right] w_g.$$

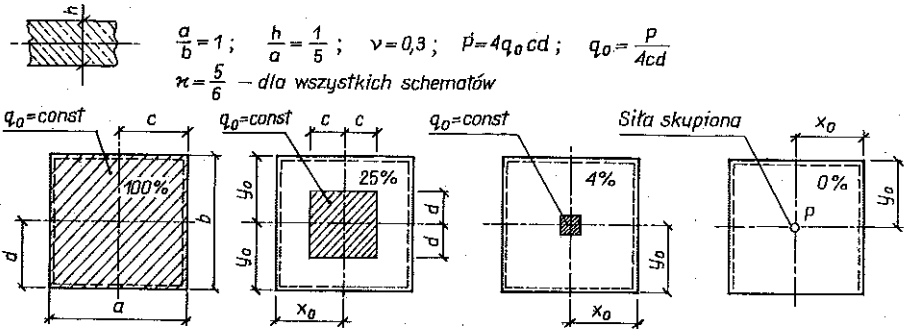
8. ANALIZA NUMERYCZNA ROZWAŻANEGO PROBLEMU

Otrzymane rozwiązania (5.3), (3.23), (6.7) i (6.10) zostały zaprogramowane na mikrokomputer Oric-1. Ugięcie i momenty zginające wyznaczono w środku płyty w czterech przypadkach obciążenia. Powierzchnia górna płyty jest obciążona równomiernie, ciągle i symetrycznie względem jej środka, statycznie lub dynamicznie-nagle. Przyłożone obciążenia zajmują odpowiednio 100%, 25%, 4% i 0% całkowitej powierzchni płyty, a jego wypadkowa statyczna jest jednakowa we wszystkich czterech przypadkach analizowanych numerycznie w pracy. Sumowanie podwójnych szeregów wykonano dla $m, n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 21, 31, 51$ i 101 wyrazów (Tabl. 1).

Obliczenia dynamiczne wykonano w przedziale czasu równym podstawowemu okresowi drgań giętych rozpatrywanej płyty. Rozwiązanie (5.3) zależy od ω_1 i ω_3 , rozwiązanie (6.7) zaś zależy od ω_1 , ω_3 i ω_2 . Zasadnicze badanie numeryczne przeprowadzono dzieląc największy okres drgań T_1

Tablica 1. Płyta o średniej grubości. Porównanie ugięć statycznych

$$w(x,y) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} \omega_2^2}{\gamma_{m,n}^4 \Omega_1^2 \Omega_2^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y; \quad w(x,y) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n}}{\gamma_{m,n}^4} \left[1 + \frac{(2-\nu) \gamma_{m,n}^2}{10(1-\nu)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$




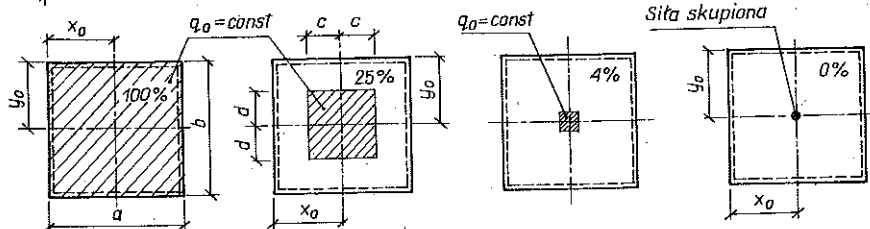
		$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$	$\frac{d}{b} = \frac{1}{2}$	$\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$	$\frac{d}{b} = \frac{1}{4}$	$\frac{c}{a} = \frac{1}{10}$	$\frac{d}{b} = \frac{1}{10}$	$\frac{c}{a} = 0$	$\frac{d}{b} = 0$
		Mnożnik dla wszystkich schematów $\frac{4Ph^4}{Dab}$		Szytyność płyty $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$					
Liczba wyrazów szeregu m, n	Schemat 1	Schemat 2	Schemat 3	Schemat 4	We wszystkich schematach podano ugięcie płyty w jej punkcie środkowym				
	1, 1	0,774759279	1,549518564	1,849573201	1,911641903				
	3, 3	0,743232903	1,622294369	2,101579213	2,216978541				
	5, 5	0,7465570661	1,609472502	2,174965654	2,345438510				
	7, 7	0,746169602	1,605616991	2,199013204	2,426120022				
	9, 9	0,746771493	1,607277421	2,203608845	2,485301225				
	11, 11	0,746450282	1,608191473	2,201053192	2,532238387				
	21, 21	0,746583800	1,607578833	2,192249033	2,683325109				
	31, 31	0,746559230	1,607531785	2,193958761	2,774889263				
	51, 51	0,746563825	1,607572990	2,193623760	2,892760166				
	101,	0,746565403	1,607565130	2,193511330	3,055779910				
Szeregi zbieżne		Mnożnik $\frac{4Ph^4}{Dab}$		Osobliwość zerowego rzędu dla ugięcia pod siłą. Szereg rozbieżny					
Współczynniki rozwinięcia obciążenia w szeregach		$f_{m,n} = \frac{4P}{\pi^2 mn cd} \sin \alpha_m c \sin \beta_n d \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0$				$f_{m,n} = \frac{4P}{ab} \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0$			

na 40 jednakowych przedziałów czasowych. W tablicy 1 i 2 podano wartości ugięcia płyty w jej środku, obciążonej odpowiednio statycznie i dynamicznie. Zbieżność rozwiązania nie budzi wątpliwości w przypadku schematów 1, 2 i 3. Przypadek czwarty (płyta obciążona siłą skupioną) wymaga dodatkowego wyjaśnienia. Wzorując się na monografii [13] łatwo sprawdzić, że np. ugięcie

Tablica 2. Płyta o średniej grubości obciążona dynamicznie. Porównanie ugięć

$$w(x, y, t) = \frac{h^4}{D} \sum \sum \frac{f_{m,n} \Omega_2^2}{\gamma_{m,n}^4 \Omega_1^2 \Omega_2^2} \left[1 - \frac{\Omega_3^2}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} \cos \omega_1 t - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

 $\frac{a}{b} = 1; \quad \frac{h}{a} = \frac{1}{5}; \quad \nu = 0,3; \quad P = 4q_0 cd; \quad q_0 = \frac{P}{4cd}; \quad \kappa = \frac{5}{6}; \quad t_0 = \frac{T_1}{2}$



	$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad \frac{d}{b} = \frac{1}{2}$	$\frac{c}{a} = \frac{1}{4} \quad \frac{d}{b} = \frac{1}{4}$	$\frac{c}{a} = \frac{1}{10} \quad \frac{d}{b} = \frac{1}{10}$	$\frac{c}{a} = 0 \quad \frac{d}{b} = 0$
Mnożnik dla wszystkich schematów $\frac{4Ph^4}{Dab}$ Sztywność płyty $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$				
Liczba wyrazów szeregu m, n	Schemat 1	Schemat 2	Schemat 3	Schemat 4
	We wszystkich schematach podano ugięcie płyty w jej środku $n_d = \frac{w_{dyn}}{w_{st}}$			
1,1	1,556504965	3,11300972	3,715824710	3,87052181
n_d	2,009017390	2,00901739	2,009017390	2,00901739
3,3	1,488961970	3,26754853	4,247939010	4,48448301
n_d	2,003358480	2,01415268	2,021308900	2,02279044
5,5	1,497958570	3,24053917	4,406480741	4,76352703
n_d	2,003768481	2,01341691	2,026005761	2,03097502
7,7	1,494681983	3,23135946	4,465153695	4,96164416
n_d	2,003059284	2,01253443	2,030328564	2,04509428
9,9	1,496155771	3,23558677	4,477015216	5,11520666
n_d	2,003498722	2,01308546	2,031674209	2,05818387
11,11	1,495309761	3,23799522	4,470245683	5,24018862
n_d	2,003227486	2,01343889	2,030957614	2,06938994
21,21	1,495667582	3,23635539	4,446455474	5,65222816
n_d	2,003348301	2,01318617	2,028262031	2,10642689
31,31	1,495599704	3,23622558	4,451165113	5,90513216
n_d	2,003323535	2,01316446	2,023828095	2,12806058
51,51	1,495612361	3,23633989	4,450239405	6,23189996
n_d	2,00332819	2,01318381	2,028715922	2,15430925
101,1	1,49511333	3,23631810	4,449927581	6,68464638
n_d	2,00332981	2,01318008	2,028677722	2,18754183
Szeregi zbieżne Mnożnik ugięć płyty $\frac{4Ph^4}{Dab}$				Osobliwość zerowego rzędu dla ugięcia pod siłą. Szereg rozbieżny.
Współczynniki rozwinięcia obciążeń w szeregach $f_{m,n} = \frac{4P}{\pi^2 mncd} \sin \alpha_m c \sin \beta_n d \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0$				$f_{m,n} = \frac{4P}{ab} \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0$

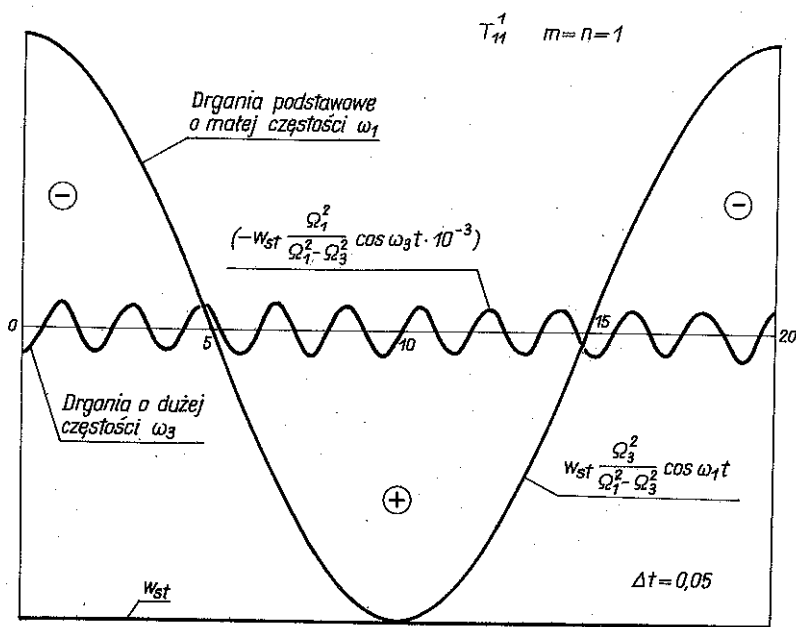
Obciążenie jest przyłożone nagle

płyty kołowej średniej grubości, obciążonej w środku siłą skupioną P i utwierdzonej na obwodzie wyraża funkcja

$$(8.1) \quad w(r) = \frac{Pa^2}{16\pi D} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \left(1 - \ln \frac{r^2}{a^2} \right) \right] - \frac{P}{4\pi H} \ln \frac{r^2}{a^2},$$

gdzie $H = \frac{5}{6} Gh$ i oznacza sztywność płyty na ściananie.

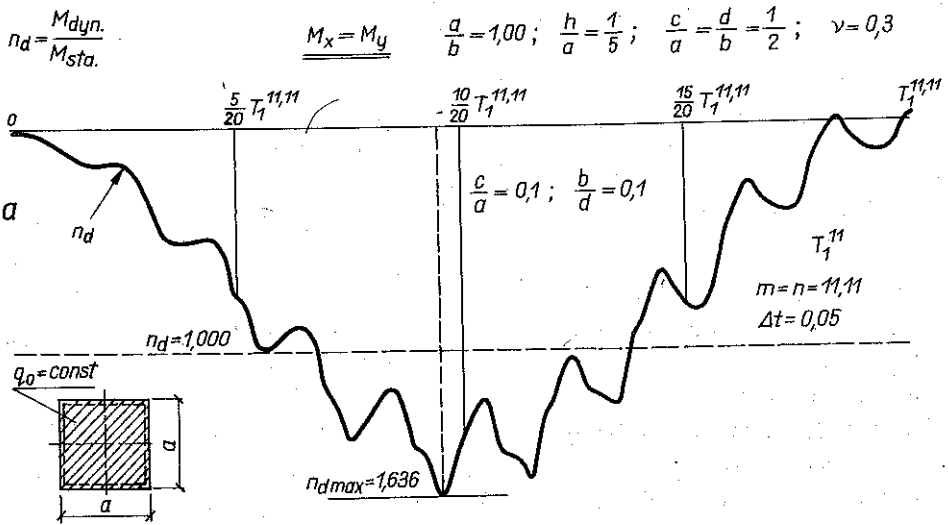
Dla $r = 0$ ugięcie to jest nieskończenie duże niezależnie od przyjętej teorii płyt średniej grubości i niezależnie od kształtu płyty. Obciążenie siłą skupioną płyty średniej grubości wywołuje jej ugięcie, wyrażające się funkcją zawierającą w miejscu przyłożenia siły osobliwość zerowego rzędu. Konsekwencją powyższego jest rozbieżność rozwiązania w schemacie czwartym. W przypadku obciążenia dynamicznego rozwiązanie jest superpozycją drgań z częstością kołową ω_1 i ω_3 . Drgania z częstością ω_1 mają amplitudy znacznie większe od amplitudy związanej z częstością ω_3 . Na rys. 3 pokazano



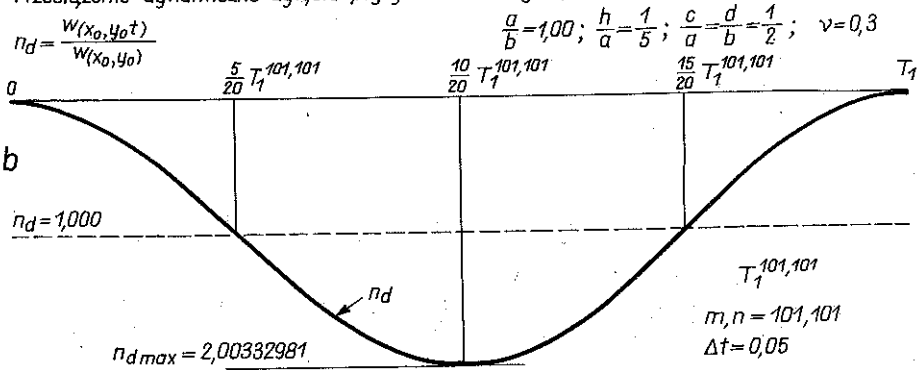
Rys. 3. Rozłożenie drgań wymuszonych ugięcia płyty o średniej grubości swobodnie podpartej obciążonej nagle i równomiernie

$$w(x, y, t) = \frac{h^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n} \bar{\Omega}_2}{\gamma_{m,n}^2 \Omega_1^2 \Omega_3^2} \left[1 + \frac{\Omega_3^2}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} \cos \omega_1 t - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$f_{m,n} = \frac{4P}{\pi^2 mn cd} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$



Przeciążenie dynamiczne ugięcia płyty w środkowym punkcie



Rys. 4. Przeciążenie dynamiczne momentu zginającego w środkowym punkcie płyty kwadratowej swobodnie podpartej wywołane nagle przyłożonym obciążeniem ciągłym i równomiernym na całej powierzchni płyty

Tablica 3. Plyta o średniej grubości. Porównanie momentów zginających

$$M_{stx} = h^2 \sum_m \sum_n \bar{S}_0 \frac{f_{m,n}}{\delta_{m,n}^4} (\gamma_m^2 + \nu \gamma_n^2) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

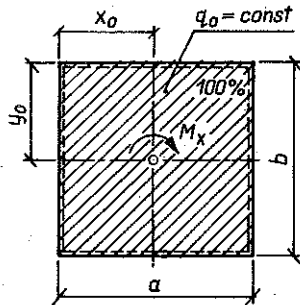
$$x_0 = \frac{a}{2}$$

$$y_0 = \frac{b}{2}$$

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$P = 4q_0 cd$$

$$q_0 = \frac{P}{4cd}$$



$$\bar{S}_0 = S_0 \frac{\bar{\Omega}_2^2}{\Omega_1^2 \Omega_3^2}$$

$$S_0 = 1 + \frac{6 \Gamma_1^2}{\gamma_{m,n}^2 \bar{\Omega}_2^2}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$$

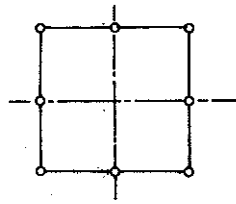
$$\kappa = \frac{5}{6}$$

ORIC-1 M Kopt.

m, n	$M_{stat.}$	$M_{dyn.}$	$n_d = \frac{M_{dyn}}{M_{stat}}$
Liczba wyrazów podw. szeregu	Mnożnik $\frac{4Ph^2}{\pi^2 cd}$; $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{1}{2}$; $\nu = 0,3$		$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ $\kappa = \frac{5}{6}$
1,1	0,765686124	0,916496054	1,19696051
3,3	0,665499396	0,780715329	1,173127031
5,5	0,669179283	0,910538111	1,321191940
7,7	0,67829408	0,852124927	1,256276522
9,9	0,684502533	0,880907511	1,286930971
11,11	0,680233969	0,863901713	1,270006723
21,21	0,682716315	0,871325897	1,276263480
31,31	0,681521568	0,870162033	1,276793110
51,51	0,681709761	0,870412738	1,276896401
101,101	0,682119375	0,870091197	1,27558037
$M_{dynx} = h^2 \sum_m \sum_n \frac{f_{m,n}}{\delta_{m,n}^4} \bar{S}_0 (\gamma_m^2 + \nu \gamma_n^2) (S_0 + S_1 \cos \omega_1 t + S_2 \cos \omega_2 t + S_3 \cos \omega_3 t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$			

Obciążenie jest przyłożone nagle

Tablica 4. Porównanie ugięć statycznych płyty obciążonej całkowicie i równomiernie na górnej powierzchni z metodą elementów skończonych



Przyjęty element skończony

$\frac{h}{a}$	Metoda podwójnych szeregów		Metoda elementów skończonych	
	Mnożnik	$\frac{qa^2}{D}$	Mnożnik	$\frac{qa^2}{D}$
0,01	$m, n = 1,1$	0,00416726909	4 elementy	0,00190
	$m, n = 3,3$	0,00406177950	9 elementów	0,00406
	$m, n = 5,5$	0,00407002290	20 elementów	0,00406
0,05	$m, n = 1,1$	0,00421052975	4 elementy	0,00357
	$m, n = 3,3$	0,00409925369	9 elementów	0,00411
	$m, n = 5,5$	0,00410867100	20 elementów	0,00411
0,2	$m, n = 1,1$	0,0049845941	4 elementy	0,00473699
	$m, n = 11,11$	0,0047772818	16 elementów	0,00474650
	$m, n = 51,51$	0,0047780085	36 elementów	0,0049033
	$m, n = 101,101$	0,0047780186	64 elementy	0,0049040
Ugięcie identycznej płyty obliczonej według klasycznej teorii				$w_{max} = 0,0406 \frac{qa^2}{D}$

Przyjęty element skończony jest izoparametryczny ośmiowzłowy
 Funkcje kształtu kwadratowe
 Element niedostosowany

poglądowo superpozycje drgań z obiema częstotliwościami ω_1 i ω_3 . Przebieg w czasie ugięcia środka płyty i momentu w tym samym punkcie pokazano na rys. 4. Płyta jest obciążona równomiernie w tym przypadku na całej powierzchni. Ugięcia w każdym kroku czasowym otrzymano sumując po 101 wyrazów podwójnego szeregu. Moment zginający jest wyznaczony dla obciążenia ciągłego mającego kształt kwadratu $c/a = 0,1$, $d/b = 0,1$, schemat trzeci. Otrzymany wykres zmiany momentu zginającego został narysowany po wysumowaniu 11 wyrazów podwójnego szeregu w każdym kroku czasowym. W tablicy 3 przedstawiono porównanie momentu zginającego w środku płyty obciążonej równomiernie na całej powierzchni górnej przy sumowaniu podwójnych szeregów od $m, n = 1$, do $m, n = 101$. Wreszcie tablica 4 pokazuje porównanie otrzymanych wyników analitycznych z metodą elementów skończonych [16 i 17].

9. WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W pracy rozważano problem graniczny pewnej płyty o średniej grubości obciążonej dynamicznie. Rozwiązanie polegało na wyznaczeniu trzech nieznanymi funkcji w , χ_x , χ_y . Funkcje te spełniają równania różniczkowe cząstkowe odpowiednio czwartego i drugiego rzędu. Dwie dodatkowe stałe całkowania w zawyżonym równaniu na ugięcia wyznaczono z równań równowagi w chwili $t = 0$. Wyniki rozwiązania podane zostały pod postacią podwójnych szeregów trygonometrycznych. Wyznaczono trzy ciągi częstości drgań swobodnych płyty. Drgania wymuszone płyty zostały opisane w przypadku obciążenia harmonicznego $q(x, y, t) = q(x, y) \sin pt$ lub $q(x, y, t) = q(x, y) \cos pt$ oraz w przypadku nagłego, raptownego przyłożenia go na płytę w chwili $t = 0$. Otrzymane rozwiązania dynamiczne ugięcia są zbieżne poza przypadkiem obciążenia płyty siłą skupioną. Obciążenie siłą skupioną płyty średniej grubości wywołuje jej ugięcie, wyrażające się funkcją zawierającą osobliwość zerowego rzędu w miejscu przyłożenia siły. Ugięcie dynamiczne środka płyty w czterech przypadkach nagle przyłożonego obciążenia, po zsumowaniu 101 wyrazów podwójnego szeregu jest:

2,00332981 w_{st} — płyta obciążona równomiernie na całej powierzchni,

2,01318008 w_{st} — płyta obciążona równomiernie i centralnie na 25% powierzchni,

2,02867772 w_{st} — płyta obciążona równomiernie i centralnie na 4% powierzchni,

2,18754183 w_{st} — płyta obciążona siłą skupioną.

W pracy analizowano również przypadek statyczny, wyznaczając ugięcie płyty w jej środku. Znajomość ugięć płyty pozwala na wyznaczenie nieznanymi funkcji χ_x i χ_y , niezbędnych do wyznaczenia naprężeń i sił wewnętrznych w dowolnym punkcie rozpatrywanej konstrukcji i w dowolnej chwili

czasu t . Funkcje χ_x i χ_y spełniają niejednorodne równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Po rozwiązaniu tych równań otrzymano wzory w postaci podwójnych szeregów cosinusowo-sinusowych określających funkcje χ_x i χ_y . Momenty zginające w płycie zależą od trzech częstości drgań swobodnych. Podwójne szeregi opisujące momenty zginające są wolniej zbieżne niż odpowiednie szeregi opisujące ugięcia lub są rozbieżne np. w przypadku obciążenia siłą skupioną. W opracowaniu podano również równania różniczkowe opisujące płyty Timoshenki, Rayleigha i Flüggego jako szczególne przypadki zastosowanej teorii.

W zakończeniu wykazemy, że częstość $\bar{\omega}_2$ spełnia równanie problemu (2.3) lub (2.4) jeśli przyjmą w nim $w \equiv 0$

$$(9.1) \quad q - \frac{h^2(2-\nu)}{10(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{q h^5}{60D(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0.$$

Po uporządkowaniu (9.1) oraz przyjęciu $q = q_0(x, y) q_t(t)$ możemy rozdzielić zmienne. Otrzymamy w wyniku dwa jednorodne równania różniczkowe (9.2)

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \nabla^2 q_0 - \frac{10(1-\nu)}{h^2(2-\nu)} (1-\lambda^4) q_0 &= 0, \\ \ddot{q}_t + \omega^2 q_t &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{5c_p^2(1-\nu)}{h^2}.$$

Obciążenie q_0 daje się rozłożyć w podwójny szereg (9.3)

$$(9.3) \quad q_0 = \sum_m \sum_n q_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y.$$

Po podstawieniu ostatniego do (9.2)₁ możemy wyznaczyć nieznaną współczynnik λ^4 podany wzorem (9.4)₁ a następnie częstość ω podaną wzorem (9.4)₂

$$(9.4) \quad \begin{aligned} \lambda^4 &= 1 + \frac{(2-\nu) \gamma_{m,n}^2}{10(1-\nu)}, \\ \omega = \bar{\omega}_2 &= \frac{\omega_{kl}}{\gamma_{m,n}^2} \sqrt{6 [10(1-\nu) + (2-\nu) \gamma_{m,n}^2]}. \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć

$$\omega_2^2 - \bar{\omega}_2^2 = \omega_{kl}^2 \frac{6}{\gamma_{m,n}^2}.$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. SHIRAKAWA, *Response of rectangular thick plates to moving loads*, Ing. Arch., **50**, 1981.
2. K. SHIRAKAWA, *Initially stressed thick plates subjected to a moving load*, SM Arch., **8**, 1983.
3. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania płyty o średniej grubości pod obciążeniem ruchomym*, Rozpr. Inżyn., **33**, 1, 1985.
4. K. SHIRAKAWA, *Bending of plates based on improved theory*, Mech. Res. Com., **10**, 4, 1983.
5. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Теория анизотропных пластин*, Изд. Наука, Москва 1967.
6. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania swobodne płyty o średniej grubości*, Arch. Inżyn. Ładow., **22**, 1, 1976.
7. G. JEMIELITA, *Drgania własne izotropowego prostopadłościanu i grubej płyty*, Arch. Inżyn. Ładow., **23**, 4, 1977.
8. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech., **2**, 2, 1945.
9. R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, J. Appl. Mech., **18**, 1, 1951.
10. R. D. MINDLIN, A. SCHACKNOW and H. DERESIEWICZ, *Flexural vibrations of rectangular plates*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1955.
11. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, [tłum. z ang.], Arkady, Warszawa 1962.
12. A. E. LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4-th Edn. Cambridge University Press, 1927.
13. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1980.
14. S. TIMOSHENKO, *Vibration problems in engineering*, D. Van Nostrand Comp., 1955.
15. М. Ш. ФЛЕКСЕР, *О поперечных колебаниях стержней*, Приклад. мат. и мех., **22**, 5, 1958.
16. E. HINTON, A. RAZZAQUE, O. C. ZIENKIEWICZ, J. D. DAVIES, *A simple finite element solution for plates of homogeneous, sandwich and cellular construction*, Proc. Inst. Civ. Enging., Univ. of Wales, 1974.
17. T. ROCK, E. HINTON, *Free vibration and transient response of thick and thin plates using the finite element method*, Earthquake Enging. and Struct. Dynamics, **3**, 1974.
18. W. FLÜGGE, *Die Ausbreitung von Biegungswellen in Staben*, Z. angew. Math. und Mech., **22**, 6, 1942.
19. L. H. DONNELL, *Beams, plates and shells*, McGraw-Hill, 1976.
20. H. REISMANN, Y. C. LEE, *Forced motions of rectangular plates* *Developments in theoretical and applied mechanics* (Ed. by D. Frederick) vol. 4, Pergamon Press, New York 1969.
21. Z. MAZURKIEWICZ, M. ŻÓRAWSKI, *Wpływ nagłej zmiany więzów na odkształcenia ustrojów sprężystych*, Arch. Inżyn. Ładow., **8**, 4, 1962.

РЕЗЮМЕ

ВЫНУЖДЕНИЕ КОЛББАНИЯ ПЛИТЫ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

В работе анализируются вынужденные колебания изотропной плиты средней толщины, удовлетворяющей граничным условиям свободного опирания. Решение заключалось в определении трех неизвестных функций w , χ_x , χ_y . Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям соответственно четвертого и второго порядков. Определены три полосы частот свободных колебаний. Результаты решения приведены в форме

двойных рядов. Непрерывное или сосредоточенное нагружение является гармоническим или внезапно приложенным к плите. Аналитические результаты решения запрограммированы на микрокомпьютер. Работа иллюстрирована таблицами и рисунками.

SUMMARY

FORCED VIBRATIONS OF A PLATE OF MODERATE THICKNESS

Forced vibrations of an isotropic plate of moderate thickness are analyzed in the paper, the plate satisfying the conditions of simple supporting along the edges. The solution consists in determining three unknown functions w , χ_x , χ_y which satisfy the respective fourth- and second-order differential equations. Three frequency bands of free vibrations are determined, and the solution is presented in the form of double series. The distributed or concentrated loads are either harmonic in time or have the character of step-functions. The corresponding micro-computer programs are given; the results are illustrated by graphs and tables.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji w dniu 22 stycznia 1986 r.