

METODA MODELOWANIA DYSKRETNEGO JEDNOWYMIAROWYCH PROCESÓW FALOWYCH W SPRĘŻYSTYCH WARSTWOWYCH PRĘTACH NIEPRYZMATYCZNYCH

GRZEGORZ BĄK i ZBIGNIEW SZCZESŃIAK (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono ogólne zasady kompleksowego modelowania rozprzestrzeniania się sprężystych fal podłużnych w heterogenicznych prętach niepryzmatycznych. Zasady dotyczą modelowania wnętrza różniczkowego rozpatrywanego problemu, warunków brzegowych oraz formy warunków początkowych. Wyprowadzono je z warunku bezbłędnej aproksymacji różnicowej dla schematu z jawnym sposobem całkowania równania falowego względem czasu oraz warunków wiernej aproksymacji procesu falowego wyznaczonego jako ściśle rozwiązanie problemu. Zastosowanie metody zilustrowano przykładem wyznaczenia współdziałania fal naprężenia z przegrodą odkształcalną umieszczoną w ośrodku warstwowym.

1. WSTĘP

Rozwiązywanie zadań rozprzestrzeniania się jednowymiarowych fal naprężeń nie stanowi istotnego problemu z matematycznego punktu widzenia. Znalazienie jednak rozwiązania konkretnego zadania, formułowanego adekwatnie do rzeczywistego problemu technicznego, może być niejednokrotnie bardzo trudne i żmudne. Jednym z elementów komplikujących poszukiwanie rozwiązań jest warstwowość ośrodka. Konieczna jest wówczas wielofazowa analiza procesu falowego uwzględniającego wielokrotne odbicia. Zadanie mechaniki falowej nie jest też zwykle celem samym w sobie, ale może być częścią szerszej analizy teoretycznej. Uzasadnia to potrzebę poszukiwania metod rozwiązywania, od których należy wymagać przede wszystkim dużej skuteczności i przynajmniej zadawalającej dokładności w porównaniu do znanych metod analizy teoretycznej.

Złożoność problemów sugeruje stosowanie metod numerycznych. Najbardziej znane metody zostały opisane m.in. w pracy [1]. Oryginalny sposób analizy numerycznej procesów falowych w prętach warstwowym został podany w pracy [2]. Współcześnie podejmowane są próby zastosowania metody elementów skończonych w analizowanych zagadnieniach. Jedną z prac traktujących ten problem najbardziej kompleksowo jest praca [3]. Z pracy

tej i innych wynika, że na gruncie MES nie rozwiązano jeszcze poprawnie czaso-przestrzennego przebiegu procesu falowego, np. [4]. Uwagę skupia się w zasadzie na ocenie uzyskanych wartości wybranych wielkości dynamicznych.

Stosowanie metod numerycznych wiąże się z dyskretyzacją ciągłego modelu matematycznego. Nie jest przy tym wymagane nadawanie sensu fizycznego takiemu postępowaniu. Zaproponowana w niniejszym artykule metoda rozwiązywania opiera się na odmiennej koncepcji. Odmienność ta polega na akcentowaniu sensu fizycznego dyskretnego modelu matematycznego wynikającego z jawnej metody różnicowej. Otrzymuje się w ten sposób uzasadnienie dla znanego fizycznego modelu dyskretnego rozprzestrzeniania się fal podłużnych. Model ten to układ mas sztywnych połączonych sprężynami. W celu wyprowadzenia zasad konstruowania i działania takiego modelu dyskretnego analizowano warunek bezbłędnej aproksymacji różnicowej. Przeprowadzona analiza umożliwiła wyprowadzenie wniosków odnośnie do całokształtu modelowania: 1) dyskretniej postaci wnętrza rozpatrywanego problemu, 2) dyskretniej postaci warunków brzegowych oraz 3) formy warunków początkowych.

W literaturze nie poświęcono uwagi takiemu ujęciu rozpatrywanego problemu. Ujęcie to prowadzi do prostego algorytmu numerycznego jawnej metody różnicowej dla problemu rozprzestrzeniania się fal podłużnych. Algorytm ten funkcjonuje bezbłędnie przy pewnych ograniczeniach dotyczących klasy funkcji, opisujących dane obciążenia brzegów. Jego realizacja umożliwia otrzymanie wyników w izolowanych punktach czasoprzestrzeni z dokładnością do błędów zaokrągleń. Proponowana metoda pozwala analizować zjawiska falowe w prętach bez konieczności śledzenia ich w różnych fazach ruchu falowego. Taka konieczność stanowi zasadnicze źródło uciążliwości metod analitycznych, szczególnie przy analizowaniu prętów wielowarstwowych.

2. WARUNEK BEZBŁĘDNEJ APROKSYMACJI RÓŻNICOWEJ

Analizujemy równanie falowe dla liniowo-sprężystego pręta niepryzmatycznego:

$$(2.1) \quad L(u) = 0,$$

gdzie

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$u \equiv u(x, t)$ oznacza przemieszczenie oraz $a = (E/\rho)^{1/2}$ prędkość fal sprężystych w pręcie.

Nieprzymatyczność pręta w równaniu (2.1) określona jest zmianą pola powierzchni jego przekroju poprzecznego $A(x)$ według wzorów

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A(x+dx) &= A(x) + dA(x), \\ dA(x) &= 2A(x) \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Zakładamy, że w ogólności mają miejsce pewne warunki początkowe i brzegowe.

Równanie (2.1) można napisać w następującej postaci różnicowej:

$$(2.3) \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - a^2 \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{2}{j\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0,$$

gdzie

$$u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t), \quad j = 1, 2, 3, \dots, J, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Zastosowanie metody różnicowej w celu rozwiązania równania różniczkowego wymaga określenia różnicowego operatora całkowego $T(\Delta t, \Delta x)$ wiążącego poziomy czasowe i przestrzenne

$$(2.4) \quad u^{n+1} = T(\Delta t, \Delta x) u^n.$$

Za pomocą tego operatora wyznacza się rozwiązania w określonych punktach siatki czaso-przestrzennej. Przy czym uzyskiwane wartości rozwiązań są w ogólności obarczone pewnym błędem w stosunku do rozwiązań ścisłych problemu różniczkowego. Jest to błąd metody różnicowej zwany inaczej błędem aproksymacji różnicowej. Ogólnie błąd aproksymacji różnicowej ε_A , wyrazimy w następującej postaci:

$$(2.5) \quad \varepsilon_A = L_A u(x, t) - Lu(x, t),$$

gdzie L_A oznacza operator różnicowy odpowiedni dla równania (2.3) oraz L operator różniczkowy (2.1).

Błąd ε_A można ocenić rozkładając poszczególne składniki równania (2.1) i (2.3) w szereg Taylora. Podstawiając następnie (2.1) i (2.3) do (2.5) otrzymujemy po przekształceniach

$$(2.6) \quad \varepsilon_A = \sum_{k=4,6,8,\dots}^{\infty} \frac{2}{k!} \left(\Delta t^{k-2} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_j^n - a^2 \Delta x^{k-2} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_j^n \right) - a^2 \frac{2}{x} \sum_{k=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{\Delta x^{k-1}}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_j^n.$$

Można wykazać metodą indukcji, że jeżeli u jest rozwiązaniem równania (2.1), to spełnia również następujące równanie

$$(2.7) \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - a^k \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} + \frac{k}{x} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right) = 0,$$

gdzie k jest dowolną liczbą parzystą większą od 2. Równanie (2.7) jest produktem $(k-2)/2$ -krotnego działania operatorem różniczkowym L na równanie (2.1).

Podstawiając (2.7) do (2.6) otrzymujemy ogólną postać błędu aproksymacji dla równania (2.3):

$$(2.8) \quad \varepsilon_A = \sum_{k=4,6,8,\dots}^{\infty} 2a^2 (\Delta t^{k-2} a^{k-2} - \Delta x^{k-2}) \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} + \frac{1}{x(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right].$$

Wymaganie znikania błędu aproksymacji różnicowej $\varepsilon_A = 0$ prowadzi do zależności

$$(2.9) \quad \Delta x = a \Delta t.$$

Wynik ten jest poprawny również w przypadku pręta pryzmatycznego.

Wyprowadzony warunek bezbłędnej aproksymacji różnicowej (2.9) wskazuje pełną zgodność sformułowania różnicowego z różniczkowym. Oznacza to, że w izolowanych punktach czaso-przestrzeni rozwiązanie problemu różnicowego i różniczkowego jest identyczne. Konsekwencją zgodności w sensie dyskretnym jest zgodność operatora różnicowego z różniczkowym w przejściu granicznym, co można napisać następująco:

$$(2.10) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(\Delta t, \Delta x) - I}{\Delta t} = L.$$

Operowanie warunkiem bezbłędnej aproksymacji w procedurach numerycznych nie wyklucza występowania błędów zaokrągleń z uwagi na nieidealność komputera. Ze względu na bezbłędność operatora różnicowego działającego na podstawie (2.9), błędy te nie mogą przy przejściu z kroku na krok czasowy zmieniać się inaczej niż zgodnie z charakterem rozważanego ścisłego rozwiązania problemu różniczkowego. Nie ma więc potrzeby rozważania kryterium stabilności rozwiązania, co jest ogólnie konieczne w celu spełnienia warunku bezbłędnej aproksymacji. Ogólna strategia postępowania przy niespełnieniu wymienionego warunku wymaga stosowania zgodnej aproksymacji różnicowej problemu różniczkowego i spełnienia odpowiedniego kryterium stabilności. Zapewnia to zbieżność rozwiązania numerycznego, co wynika z twierdzenia P. Laxa o ekwiwalentności [5].

W rozpatrywanym przypadku można wykazać, że warunek bezbłędnej aproksymacji (2.9) zawiera się w warunku stabilności rozwiązania. Dla dowodu tego faktu wykorzystamy ogólną teorię konstruowania warunku stabilności wyłożoną w pracy [5]. Pokazano tam, że warunek stabilności wymaga zbadania wartości własnych macierzy przejścia $G(\Delta t, \Delta x, k)$ rozpatrywanego

zagadnienia różnicowego. Okazuje się, że macierz ta dla zagadnienia różnicowego (2.3) jest w postaci

$$(2.11) \quad G(\Delta t, \Delta x, k) = \begin{bmatrix} 1, & b + ci \\ ci, & 1 - c^2 + bci \end{bmatrix},$$

gdzie

$$c = \frac{2a\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{1}{2} k\Delta x,$$

$$b = \frac{2a\Delta t}{\Delta x} \cos \frac{1}{2} k\Delta x,$$

oraz $k = 1, 2, 3, \dots$ oznaczają numery kolejnych modów Fouriera. Równanie charakterystyczne macierzy $G(\Delta t, \Delta x, k)$ ma postać

$$\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0,$$

gdzie

$$A = 1 - 2 \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x + i \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{j} \sin k\Delta x.$$

Rozwiązanie różnicowe będzie stabilne, jeżeli promień spektralny R

$$(2.12) \quad R = \max |\lambda_i| \leq 1.$$

Warunek (2.12) jest spełniony, jeżeli

$$(2.13) \quad \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x + \frac{1}{j^2} \cos^2 \frac{1}{2} k\Delta x}.$$

W przypadku pręta niepryzmatycznego bez wierzchołka należy rozważać (2.13) dla $j \geq 1$. Minimalizacja prawej strony (2.13) prowadzi do nierówności

$$(2.14) \quad \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

w której zawiera się wymaganie bezbłędnej aproksymacji. Identyczne wyniki otrzymujemy w przypadku równania falowego dla pręta przyzmatycznego.

3. MODEL DYSKRETNY WNĘTRZA NIEPRYZMATYCZNEGO PRĘTA SPRĘŻYSTEGO

Można wykazać, że forma różnicowa (2.3) wynika z następującego układu równań:

$$(3.1) \quad \ddot{u}_j^{n,n+1} = \frac{A_j - \sigma_j^n - A_{j+1} + \sigma_{j+1}^n}{\Delta m_j},$$

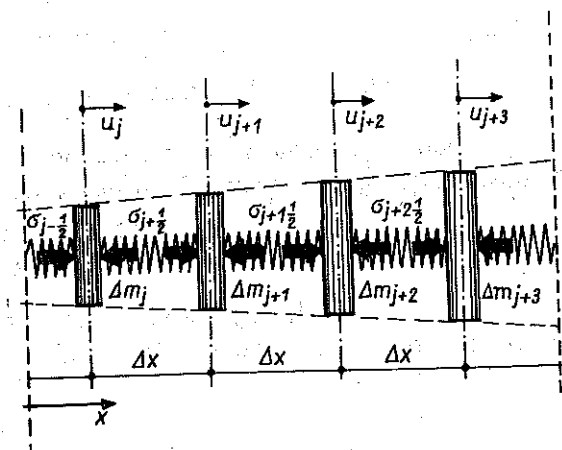
$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Delta u_j^{n,n+1} &= \Delta u_j^{n-1,n} + \ddot{u}_j^{n,n+1} \Delta t^2, \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta u_j^{n,n+1}, \\ \sigma_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} E, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta u_j^{n,n+1}$ oznacza przyrost przemieszczenia j -tej masy według parabolicznej aproksymacji względem czasu oraz A_{j-} , A_{j+} pola powierzchni przekrojów poprzecznych pręta odpowiadające współrzędnym $x_{j-} = \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta x$ i $x_{j+} = \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x$.

Zgodnie z (2.2) te pola powierzchni obliczamy za pomocą następujących wzorów różnicowych:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A_{j\pm} &= A_j \pm \Delta A, \\ \Delta A &= 2A_j \frac{1}{x_j} \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

W układzie (3.1) kolejne równania stanowią dyskretną formę równania ruchu, wzory wynikające z jawnego sformułowania różnicowego oraz warunków liniowej sprężystości dla małych odkształceń. Jest oczywiste, że równania (3.1) opisują funkcjonowanie modelu dyskretnego przedstawionego na rys. 1.



Rys. 1

W modelu tym dla wygody wprowadzono jednakową numerację sprężyny i poprzedzającej masy. Oznacza to, że w algorytmie obliczeniowym indeksy „połówkowe” $j - \frac{1}{2}$ i $j + \frac{1}{2}$ w równaniach (3.1) są zastępowane indeksami całkowitymi, $j - 1$ i j z odpowiednią interpretacją.

Aby omawiany model dyskretny poprawnie symulował dokładne rozwiązanie musi spełniać warunek bezbłędnej aproksymacji różnicowej (2.9). Wielkość sztywnych mas w modelu dyskretnym należy zatem ustalać według wzoru

$$(3.3) \quad \Delta m_j = A_j a \Delta t \rho.$$

Bezbłędne funkcjonowanie modelu dyskretnego rozważanego zagadnienia zależy nie tylko od odpowiedniej konstrukcji jego wnętrza. Konieczne jest również zaproponowanie właściwych modeli warunków brzegowych i formy warunków początkowych co przedstawiamy w dalszej części pracy.

4. MODELE DYSKRETNE WARUNKÓW BRZEGOWYCH

Poniżej skonstruujemy modele dyskretnie warunków brzegowych dla przekrojów pręta, w których zachodzi skokowa zmiana własności fizyko-mechanicznych. W szczególnych przypadkach tych modeli otrzymamy modele brzegów swobodnego albo nieodkształcalnego. Uwagę skupimy na warunku brzegowym dla przypadku pręta przyrzątecznego. Nie jest to ograniczeniem rozważań ze względu na lokalność tego warunku w sensie przestrzennym.

Model fizyczny rozważanego pręta ilustruje rys. 2a. Propozycję odpowiedniego modelu dyskretnego przedstawia rys. 2b. W modelu tym zawarto zasadę bezbłędnej aproksymacji różnicowej na obu rozważanych odcinkach pręta, przy zachowaniu stałego kroku czasowego Δt . Na granicy warstw s - s przyjmujemy masę brzegową Δm_{br} , której wielkość wyznaczamy z warunku zachowania masy globalnej prętów oraz warunku ciągłości naprężeń:

$$(4.1) \quad \sigma_{s,r}(t) = \sigma_{s,r+1}(t) = \sigma_s(t).$$

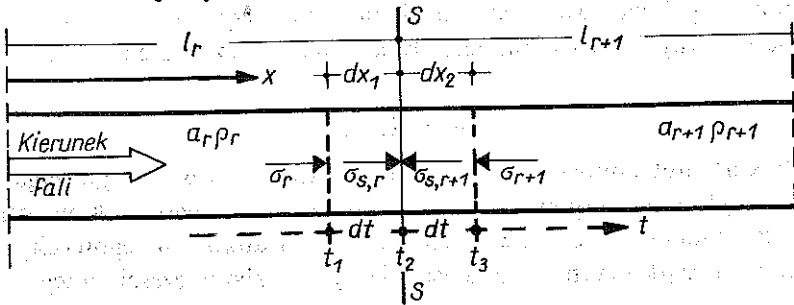
Indeksami $r, r+1$ oznaczono numery odcinków pręta, sąsiadujących ze sobą na granicy s - s . Przyjęcie zwartej masy brzegowej obejmującej elementy stykających się prętów zapewnia tożsamościowe spełnienie warunków zgodności przemieszczeń:

$$(4.2) \quad u_{s,r}(t) = u_{s,r+1}(t) = u_s(t).$$

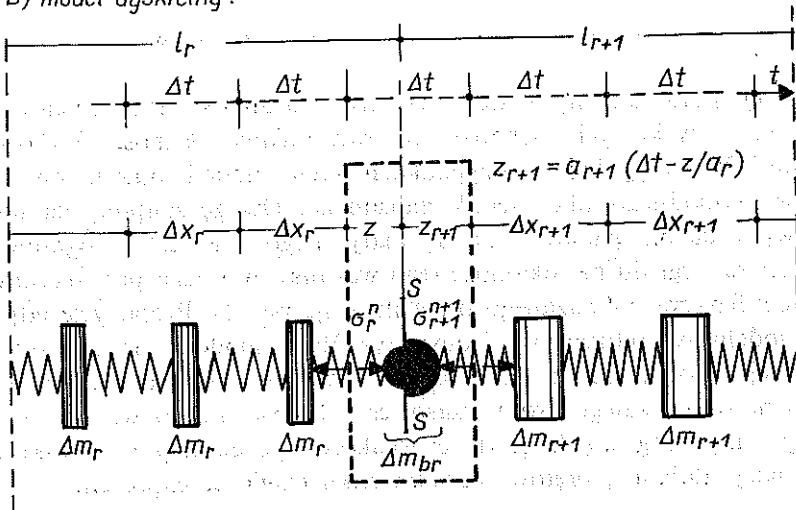
Dla określenia masy brzegowej rozważamy falę rozprzestrzeniającą się w pręt niezaburzony. Naprężenie $\sigma_s(t)$ jest sumą naprężenia padającego $\sigma_r(t)$ i pewnego naprężenia odbitego na granicy warstw $\sigma_r'(t)$. W mechanice falowej znana jest ścisła relacja pomiędzy amplitudami naprężeń $\sigma_s(t)$ $\sigma_r(t)$. Dla naszych potrzeb wykorzystamy tę relację z dostosowaniem oznaczeń czasowych do sposobu funkcjonowania modelu dyskretnego:

$$(4.3) \quad \sigma_{r+1}(t_3) = \sigma_s(t_2) = \sigma_r(t_1) \frac{2\alpha_r}{\alpha_r + 1},$$

a) model fizyczny:



b) model dyskretny:



Rys. 2

gdzie

$$\alpha_r = \frac{a_{r+1} Q_{r+1}}{a_r Q_r},$$

oraz gdzie czasy t_1, t_2, t_3 określają kolejne położenia czoła fali naprężeń, przy czym $t_2 = t_1 + dt$, $t_3 = t_2 + dt$, $dx_1 = a_r dt$, $dx_2 = a_{r+1} dt$, rys. 2a.

Ogólność wzoru (4.3) wynika z przyjętej do rozważań ogólnej postaci fali, tj. $u_i = A_i \cos(\omega t - k_i x)$. Masę brzegową Δm_{br} można wyrazić na podstawie zasady zachowania masy za pomocą parametru z , rys. 2b,

$$(4.4) \quad \Delta m_{br} = z Q_r + \left(\Delta t - \frac{z}{a_r} \right) a_{r+1} Q_{r+1}.$$

Dla modelu dyskretnego przy założonym kierunku fali obowiązuje zgodnie z (3.1) wzór

$$(4.5) \quad \sigma_{r+1}^{n+1} = \frac{\sigma_r^n}{\Delta m_{br}} a_{r+1} Q_{r+1}$$

Wzór (4.3) napiszemy w postaci dyskretnej

$$(4.6) \quad \sigma_{r+1}^{n+1} = \frac{2\alpha_r}{\alpha_r + 1} \sigma_r^n$$

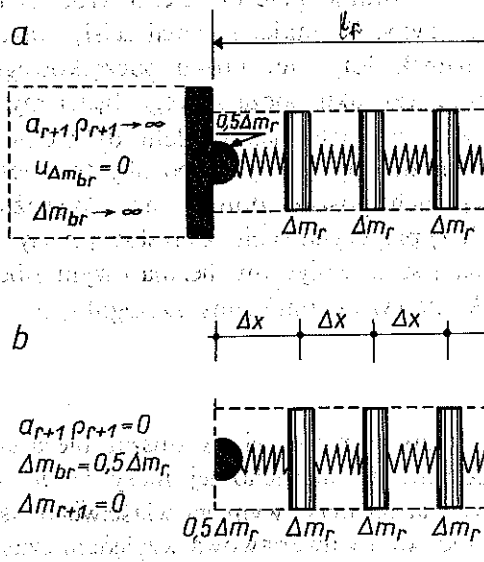
Z porównania prawych stron (4.5) i (4.6) otrzymamy poszukiwaną wartość parametru z:

$$(4.7) \quad z = \frac{1}{2} \Delta x_r$$

Uwzględniając (4.7) w (4.4) otrzymujemy wielkość masy brzegowej

$$(4.8) \quad \Delta m_{br} = \frac{1}{2} (\Delta m_r + \Delta m_{r+1})$$

Przedstawione rozumowanie jest również poprawne dla fali poruszającej się w kierunku przeciwnym do założonego na rys. 2. Wykorzystując więc zasadę superpozycji oraz zależności analogiczne do (3.1), otrzymamy ogólne rozwiązanie zagadnienia przejścia fali naprężeń przez granicę s-s. Wykorzystanie w modelu masy brzegowej zgodnie z (4.8) zapewnia bezbłędną realizację dowolnego procesu falowego w prętach warstwowych. Omawiany model warunku brzegowego nie umożliwia bezpośredniego określenia naprężeń na



Rys. 3

granicy warstw, a tylko w odległościach $0,5 \Delta x_r$ oraz $0,5 \Delta x_{r+1}$ od granicy s-s. Jednak dla małych Δx_r i Δx_{r+1} można otrzymać wystarczająco dokładnie oszacowanie naprężeń $\sigma_s(t)$.

Jeżeli zachodzi potrzeba uzyskania naprężeń dokładnie na granicy warstw, to wystarczy tylko odpowiednio zinterpretować i wykorzystać rozwiązania otrzymane w omawianym sąsiedztwie granicy warstw. Adekwatnie do przyjętych oznaczeń interesujące nas naprężenie należy oznaczyć przez σ_s^{n+} . Naprężenie to wyznaczymy stosując odpowiednio zasadę zachowania pędu:

$$(4.9) \quad \sigma_s^{n+} = \sigma_r^n + \frac{\Delta m_r}{\Delta t} (v_r^{n+} - v_{\Delta m_r}^{n+1}),$$

gdzie v_r^{n+} oznacza prędkość części masy brzegowej należącej do warstwy r oraz $v_{\Delta m_r}^{n+1}$ prędkość masy brzegowej.

Przyjmując $v_{\Delta m_r}^n = 0$ i $\sigma_{r+1}^n = 0$, po przekształceniach otrzymamy, że

$$\sigma_s^{n+} = \frac{2\alpha_r}{\alpha_r + 1} \sigma_r^n, \text{ co świadczy o poprawności wzoru (4.9). Można zauważyć,}$$

że w przypadku szczególnym omawianego zagadnienia dla $\alpha_r \rightarrow \infty$ otrzymamy model dyskretny brzegu nieodkształcalnego (rys. 3a). Natomiast przyjmując $\alpha_r = 0$ otrzymamy model dyskretny brzegu swobodnego (rys. 3b).

5. RÓŻNICOWE WARUNKI POCZĄTKOWE

Dyskretyzacja czasu powoduje przesunięcie o krok skutku w stosunku do wywołującej go przyczyny. W takiej sytuacji ścisły warunek początkowy przekształca się na warunek dotyczący kroku początkowego. Pod pojęciem sformułowanie różnicowe warunku początkowego będziemy rozumieli określenie sposobu wprawienia w ruch mas modelu dyskretnego. Okazuje się, że dla rozpatrywanych modeli dyskretnych sposoby te zależą od charakteru przyczyny wywołującej ruch poszczególnych mas. Wyróżniamy tutaj dwa podstawowe przypadki: 1) przyczyna ruchu określonej masy modelu pochodzi z jego wnętrza, 2) ruch jest wywołwany bezmasowym obciążeniem brzegu swobodnego. Przypadki powyższe omówimy szczegółowo.

PRZYPADEK 1

Zakładamy, że fala rozprzestrzenia się w obszar niezaburzony. W chwili $t^n = n\Delta t$ zaburzenie dociera do nieruchomej masy $j = n$. Wyznaczenie początkowego przemieszczenia tej masy wymaga właściwego określenia $\Delta u_{j=n}^{n-1,n}$. Stosowana metoda różnicowa, dwuwarstwowa względem czasu, nie cechuje się „samostartownością”. Ze względu na idealne własności sprężyste materiału

pręta należy wymagać spełnienia warunku bezbłędnej transmisji oddziaływań wewnątrz modelu:

$$(5.1) \quad A_{j+\frac{1}{2}} \sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = A_{j-\frac{1}{2}} \sigma_{j-\frac{1}{2}}^n.$$

Mając na względzie, że zgodnie z (3.1) i (3.2)

$$(5.2) \quad \sigma_{j+}^{n+1} = \left(\Delta u_{j=n}^{n-1,n} + \frac{A_{j-} \sigma_{j-}^n \cdot \Delta t^2}{\Delta m_j} \right) \frac{E}{\Delta x},$$

otrzymujemy na podstawie (5.1)

$$(5.3) \quad \Delta u_{j=n}^{n-1,n} = 0.$$

Uzyskany wynik umożliwia wykorzystanie formy (3.1)₂ w całej procedurze bez wyróżnienia chwili początkowej dla każdej masy modelu. Można zauważyć, że warunek (5.3) jest inny niż dla typowego zadania dynamiki w sformułowaniu różnicowym, z zerowym warunkiem początkowym dla prędkości.

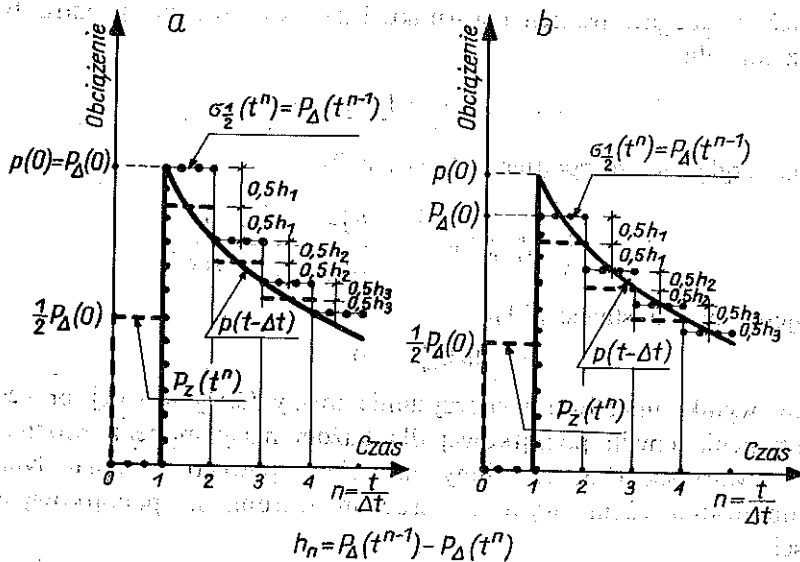
PRZYPADEK 2

Rozpatrujemy model dyskretny swobodnego brzegu pręta. Model ten jak wykazano w p. 4, jest szczególnym przypadkiem modelu brzegu o skokowo zmiennych impedancjach ($\Delta m_r = 0$) (rys. 3b). Symuluje on poprawnie odbicie fali rozprzestrzeniającej się z wnętrza pręta. Stąd wykorzystać należy wyrowadzony uprzednio warunek (5.3), tj. $\Delta u_1^{-1,0} = 0$.

Dodatkowym postulatem jest wymaganie, aby w modelu propagował się pożądaný proces falowy, stanowiący dobrą aproksymację rozwiązania ścisłego równania (2.1). Okazuje się, że postulat ten nie może być spełniony, jeżeli tylko aproksymujemy schodkowo dane obciążenie $p(t)$ i taką aproksymację potraktujemy jako obciążenie modelu. Występuje konieczność odpowiedniego modelowania obciążenia zewnętrznego. Wynika to z faktu, że masa brzegowa modelu jest równa $0,5 \Delta m_{r+1}$, a funkcjonowanie modelu jest opisywane co krok czasowy Δt . W tym celu dane obciążenie $p(t)$ należy aproksymować z nadmiarem (niedomiarem) albo uśrednić przedziałami z jednoczesnym przesunięciem o krok Δt . Otrzymuje się w ten sposób $P_A(t^n)$, które zgodnie z ideą naprężeniowego warunku dla brzegu swobodnego $\sigma(0, t) = p(t)$, umożliwia ustalenie odpowiedniego warunku dla problemu różnicowego:

$$(5.4) \quad \sigma^{n+1} = P_A(t^n).$$

Przestrzennie warunek ten odnosi się do pierwszej sprężyny modelu i powoduje, że do jego wnętrza propaguje się bezbłędnie przyjęta aproksymacja obciążenia $p(t)$. Spełnienie warunku (5.4) wymaga określenia odpowiedniego obciążenia $P_2(t^n)$ działającego na masę brzegową modelu. Obciążenie to nie może być identyczne z $P_A(t^n)$. Z analizy zależności (3.1), przy wykorzystaniu (5.3), można ustalić poszukiwane obciążenie



Rys. 4

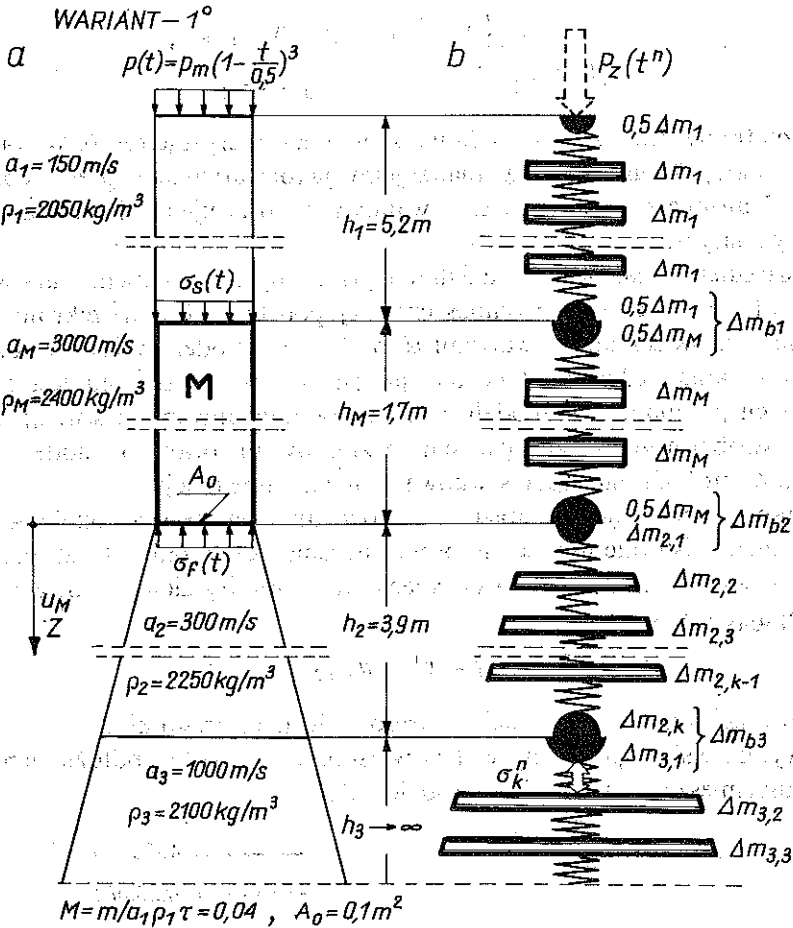
$$(5.5) \quad P_z(t^n) = \begin{cases} 0,5 P_A(t^0) & \text{dla } n = 0; \\ P_A(t^{n-1}) - 0,5 [P_A(t^{n-1}) - P_A(t^n)] & \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Zaproponowany sposób modelowania oddziaływania bezmasowego na brzeg swobodny zilustrowano na rys. 4. Linia ciągłą oznaczono zadane obciążenie ciągłe $p(t)$, które podlega translacji o kroku Δt i aproksymacji schodkowej. Aproksymacje $P_A(t^{n-1})$, zrealizowane z nadmiarem albo uśrednione przedziałami, przedstawiono na rys. 4a i b liniami kropkowanymi. Właściwie dla tych sytuacji obciążenia zewnętrzne $P_z(t^n)$ dla modelu są oznaczone liniami przerywanymi.

6. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY

W celu zademonstrowania skuteczności proponowanej metody modelowania dyskretnego, rozwiążemy zadanie współdziałania fal naprężenia z przegrodą odkształcalną umieszczoną w ośrodku warstwowym. Zadanie to będzie również ilustracją konstruowania modelu dyskretnego danego zagadnienia falowego za pomocą modeli opisanych w p. 3, 4 i 5. Obszerne omówienie podobnego zadania znajduje się w pracy [6]. Schemat zadania ilustruje rys. 5a.

Przegroda M charakteryzuje się masą jednostkową m przypadającą na jednostkę pola powierzchni oraz impedancją $a_M \varrho_M$. Ośrodek sąsiadujący



WARIANT - 2° : $a_3\rho_3 \rightarrow \infty$; pozostałe dane jak w wariantcie 1°

WARIANT - 3° : warstwa 2-ga i 3-cia jest pryzmatyczna, pozostałe dane jak w wariantcie 1°

Rys. 5

z przegrodą M jest trójwarstwowy. Warstwę pierwszą i przegrodę analizuje się jako pręt pryzmatyczny. Natomiast warstwę drugą i trzecią przyjęto w postaci pręta, niepryzmatycznego. Warstwę trzecią będziemy traktować jako pół-przestrzeń; $h_3 \rightarrow \infty$. Niepryzmatyczność warstwy drugiej i trzeciej określono zgodnie z metodą Lubimowa wyłożoną w pracy [7]. W myśl tej metody, zmianę powierzchni przekroju poprzecznego warstw $A(z)$ wyznacza się ze wzoru $A(z) = A_0 z^2/z_0^2$, gdzie z_0 jest parametrem doświadczalnym, $A_0 = A(0)$. Przyjmujemy, że na zewnętrznej powierzchni pierwszej warstwy działa obciążenie w postaci

$$(6.1) \quad p(t) = \begin{cases} p_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^\beta & \text{dla } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{dla } t > \tau. \end{cases}$$

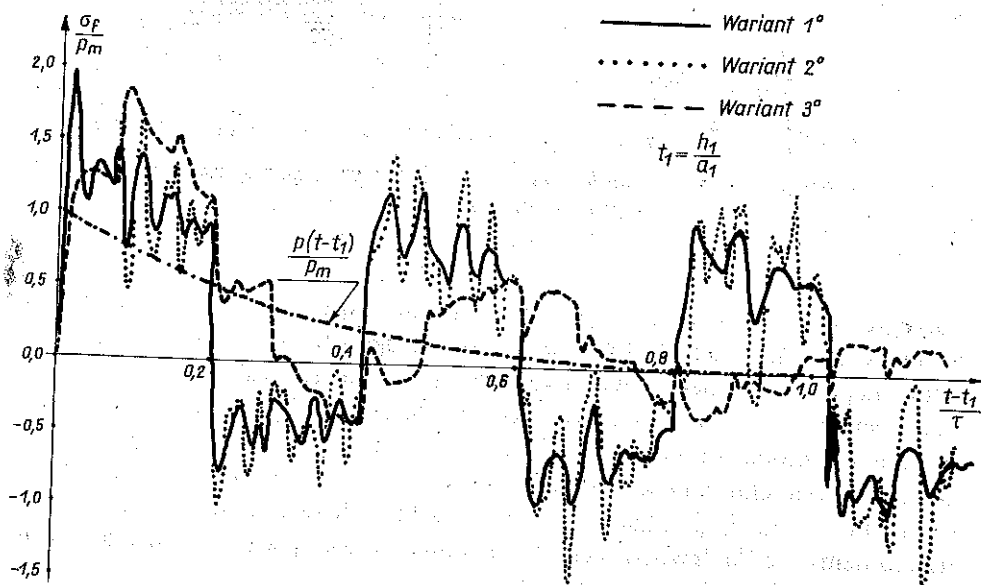
Rozpatrzmy trzy warianty zadania, które charakteryzuje rys. 6. W wariacie 1 i 2 warstwę drugą i trzecią analizujemy jako warstwowy pręt niepryzmatyczny. Natomiast w wariacie 3 warstwy te traktujemy jako warstwowy pręt pryzmatyczny.

Poszukujemy reakcji współdziałania przegrody z ośrodkiem warstwowym $\sigma_s(t)$, $\sigma_f(t)$, rys. 5a oraz przemieszczeń jej podstawy U_M (przekroju $z=0$). Zgodnie z rozważaniami zawartymi w p. 3, 4 i 5 model dyskretny rozpatrywanego zadania będzie miał postać jak na rys. 5b. Model ten jest złożony ze znanych już modeli: 1) modeli wnętrza poszczególnych warstw, 2) modelu brzegu swobodnego z obciążeniem bezmasowym oraz 3) modeli granic warstw, w których zachodzi skokowa zmiana impedancji.

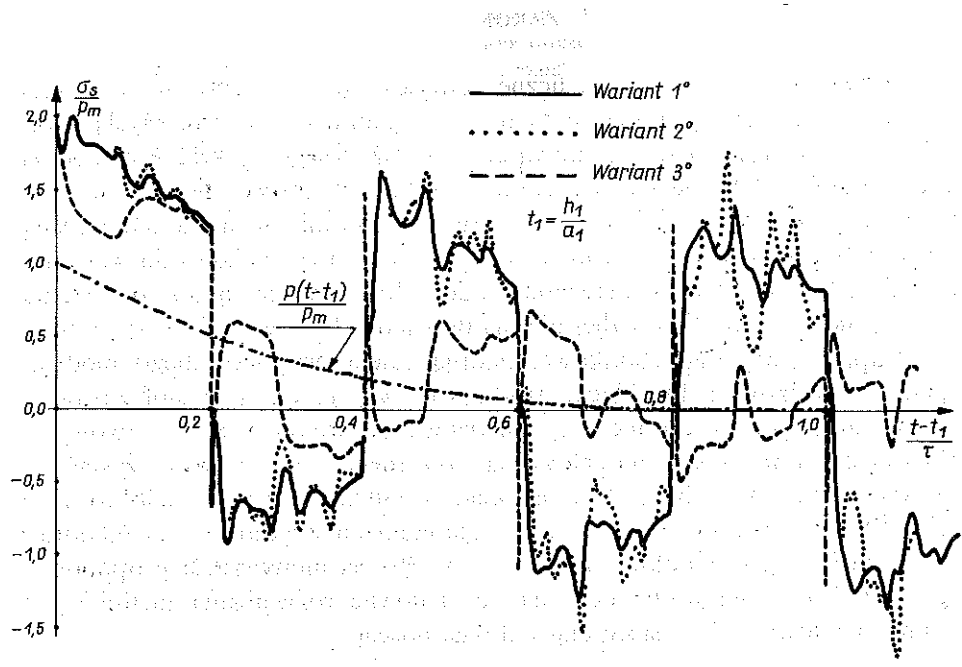
Zadanie rozwiązuje się stosując odpowiednio zależności różnicowe (3.1). W wariacie 3 istotnie uprościmy proces liczenia, jeżeli zamiast sukcesywnego rozbudowywania modelu warstwy trzeciej (rys. 5b), będziemy obliczać reakcje z następującego wzoru:

$$(6.2) \quad \sigma_k^n = v_{Am_{b3}}^n a_3 Q_3.$$

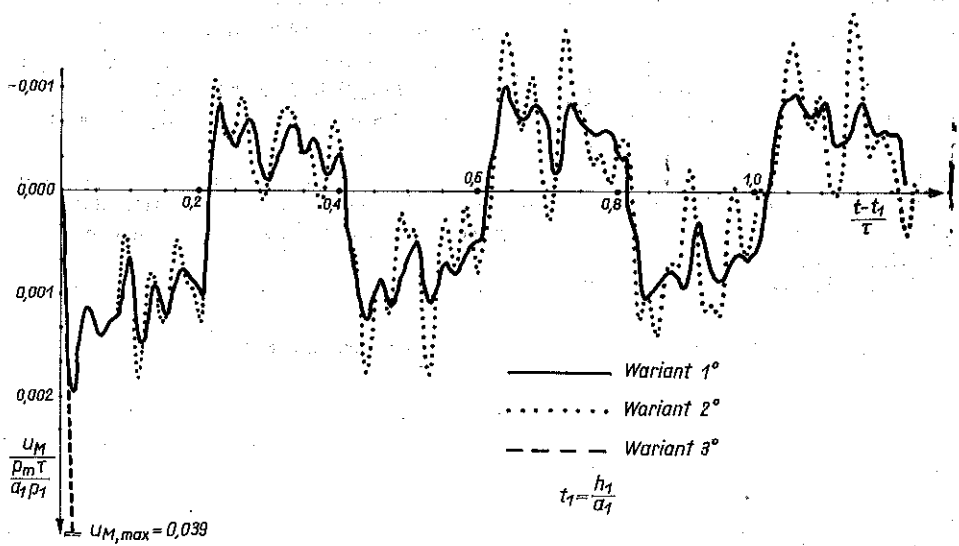
Rozwiązanie zadania w postaci wykresów ilustrują rysunki 6, 7, 8. Otrzymane wyniki wskazują istotny wpływ własności warstw w podłożu przegrody na jej przemieszczenia i reakcje współdziałania.



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

7. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono specyficzne podejście do numerycznego rozwiązywania jednowymiarowych, niestacjonarnych zagadnień falowych. Myślą przewodnią tego podejścia jest akcentowanie sensu fizycznego dyskretnego modelu matematycznego. W efekcie otrzymuje się bardzo proste fizyczne modele dyskretnie rozwiązywanych zagadnień. Funkcjonowanie tych modeli opisują zależności wynikające z jawnej metody różnicowej, przy zachowaniu warunku bezbłędnej aproksymacji. Omawiane modele dostosowane są do rozważania fal silnej nieciągłości. Fala słabej nieciągłości może być ze skończoną dokładnością aproksymowana schodkowo. Istotną zaletą proponowanego modelowania jest całkowita likwidacja trudności związanych z wielofazowością procesu falowego, szczególnie przy analizowaniu prętów wielowarstwowych.

Przedstawione zalety modelowania fizycznego można wykorzystać w znacznie szerszych analizach, na przykład w analizie zderzeń wielokrotnych prętów lub procesu kawitacji oraz w zagadnieniach współdziałania odkształcalnej konstrukcji z ośrodkiem warstwowym. Pewna modyfikacja proponowanego sposobu modelowania pozwala konstruować rozwiązania nieliniowych zagadnień falowych z wystarczającą dokładnością.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1974.
2. Cz. RYMARZ, *Numeryczne algorytmy obliczenia niestacjonarnych procesów falowych w sprężystych jednowymiarowych ośrodkach warstwowych*, Biul. WAT, 1, 233, 1972.
3. А. П. СИНИЦИН, *Метод конечных элементов в динамике сооружений*, Стройиздат, Москва, 1978.
4. R. A. KUHNLEMEYER, J. LYSMER, *Finite element method accuracy for wave propagation problems*, J. Soil Mech., Foundations Division, Technical Notes, Vol. 99, SM5, May 1973.
5. Р. Д. РИХТМЬЕР, *Разностные методы решения краевых задач*, Изд. Иностран. Лит., Москва 1960.
6. Z. ŁĘGOWSKI, K. PODOLAK, E. WŁODARCZYK, *Działanie wybuchu na konstrukcję umieszczoną w gruncie*, Biul. WAT, 7, 275, 1975.
7. I. KISHEL, *Dynamika fundamentów pod maszyny*, PWN, Warszawa 1957.

РЕЗЮМЕ

МЕТОД ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ СЛОИСТЫХ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЯХ

В работе представлены общие принципы комплексного моделирования распространения упругих продольных волн в гетерогенных непризматических стержнях. Принципы касаются моделирования внутренней области рассматриваемой дифференциальной

проблемы, граничных условий и форм начальных условий. Они выведены из условия безошибочной разностной аппроксимации для схемы с явным способом интегрирования волнового уравнения по времени, а также условий конформной аппроксимации волного процесса, определенного как точное решение проблемы. Применение метода иллюстрировано примером определения взаимодействия волн напряжения с деформируемой преградой, помещенной в слоистой среде.

SUMMARY

A METHOD OF DISCRETE MODELLING OF PROPAGATION OF ELASTIC LONGITUDINAL WAVES IN NON-PRISMATIC HETEROGENEOUS BARS

The paper deals with general principles of complex modelling of propagation of the elastic longitudinal waves in non-prismatic heterogeneous bars. The principles refer to the modelling of the differential interior of the problem and the boundary conditions and the form of initial condition. They are derived from the condition of vanishing of the difference approximation error and from the conditions of accurate approximation of the wave process determined as the exact solution. An example concerning the interaction between the stress waves and the deformable plate placed in a layered medium is given to illustrate the application of the method proposed.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 kwietnia 1986 r.
