

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI SPRĘŻYSTYCH KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH I BÉLKOWYCH

DARIUSZ BOJCZUK (KIELCE)

W pracy przedstawiono metodę badania wrażliwości liniowo-sprężystych konstrukcji prętowych i belkowych ze względu na zmiany parametrów geometrycznych. Sprowadza się ona do tworzenia zależności wariacyjnych dla konstrukcji badanej i odpowiedniej konstrukcji sprzężonej na podstawie zasad energetycznych. Pokazano sposób przeprowadzania analizy wrażliwości ze względu na zmiany parametrów geometrycznych zarówno o charakterze zmiennych wymiarowych jak i konfiguracyjnych pozwalających na dowolną modyfikację kształtu konstrukcji.

I. WSTĘP

Znajomość macierzy wrażliwości odgrywa istotną rolę w projektowaniu konstrukcji sprężystych. Na jej podstawie konstruktor może dokonać doraźnych zmian poprawiających własności konstrukcji. Znajomość jej znajduje również zastosowania w różnorodnych zadaniach optymalizacyjnych rozwiązywanych metodami gradientowymi.

Zagadnienia badania wrażliwości nabierają coraz większego znaczenia wraz z rozwojem zastosowań elektronicznych maszyn cyfrowych. W związku z tym pojawiła się konieczność opracowywania nowych metod analizy wrażliwości zastępujących tradycyjny rachunek pochodnych.

Celem niniejszej pracy jest stworzenie metod pozwalających na wyprowadzenie dokładnych wzorów określających współczynniki macierzy wrażliwości w jawnej postaci, dla sprężystych konstrukcji prętowych i belkowych. Powyższy cel będzie realizowany przez zaprezentowanie metody układów sprzężonych w zastosowaniu do dowolnych zadań modyfikacyjnych dla wyżej wymienionych ustrojów.

Znaczący rozwój w zakresie rozwiązywania problemów z analizy wrażliwości konstrukcji datuje się od końca lat siedemdziesiątych, aczkolwiek już wcześniej pisano i publikowano na ten temat.

W Polsce zbliżoną tematyką lecz potraktowaną innymi metodami zajmowali się w latach pięćdziesiątych A. BRANDT, J. KOSMOWSKI, Z. WASIUTYN-

ski [1]. W kilka lat później Z. WASIUTYŃSKI i A. BRANDT napisali artykuł podsumowujący dotychczasową wiedzę na temat wrażliwości i optymalizacji konstrukcji [12].

W pracach Z. MROZA i K. DEMSA [3, 4 i 5] stosujących już koncepcję układów sprzężonych spotykamy się z analizą wrażliwości konstrukcji ciągłych; rozważania te nie dają się jednak w bezpośredni sposób przenieść na klasę konstrukcji rozważanych w tej pracy. Problemem badania wrażliwości konstrukcji zajmowali się także E. J. HAUG i J. S. ARORA [2]. J. S. ARORA rozpatrywał konstrukcje prętowe i belkowe w pracy [8]. Zaproponowana przez niego metoda oparta na rozszerzeniu macierzy sztywności, chociaż skuteczna w działaniu, nie pozbawiona jest wad. Wymaga ona wykonania obliczeń polegających na bezpośrednim różniczkowaniu wyrazów macierzy sztywności, innych dla każdej konstrukcji i nie dających się zrealizować przy użyciu maszyn cyfrowych. Zagadnieniem badania ustrojów dyskretnych o zmiennej topologii zajmował się również K. I. MAHD [10]. Wyznaczył on wartości skończonych zmian sił wewnętrznych i ugięć w przypadku skończonych zmian zmiennych wymiarowych.

Przejdźmy z kolei do krótkiego omówienia zawartości pracy. W rozdziale 2 zdefiniowano podstawowe pojęcia analizy wrażliwości. W rozdziale 3 przedstawiono metodę badania wrażliwości opartą na budowie układów sprzężonych. Pokazano sposób wprowadzania układów sprzężonych w poszczególne zadania oraz wyprowadzono wzory na współczynniki macierzy wrażliwości dla różnych modyfikacji kształtu konstrukcji prętowych i belkowych. W rozdziale 4 w formie przykładu rozwiązywanego metodą elementów skończonych przedstawiono sposób stosowania rozważanej metody w konkretnych zastosowaniach technicznych.

Rozważania ograniczymy do konstrukcji wykonanych z materiału liniowo-sprężystego podlegającego prawu Hooke'a. Przyjmijmy ponadto, że własności sprężyste materiału są stałe w całym obszarze zajmowanym przez ciało lub też mogą się zmieniać skokowo na powierzchniach leżących wewnątrz rozpatrywanego ciała.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Przez analizę wrażliwości konstrukcji rozumiemy zbadanie wpływu zmiany pewnego parametru charakteryzującego tę konstrukcję (geometrycznego lub materiałowego) na wielkość opisującą własności czy sposób pracy tej konstrukcji (np. reakcja podporowa, ugięcie, siła wewnętrzna itp.).

Przyjmijmy, iż chcemy zbadać wpływ wektora parametrów $\mathbf{a} (a_1, a_2, \dots, a_n)$ na wielkość wektorową $\mathbf{A} (A_1, A_2, \dots, A_k)$. Aby znaleźć zależność funkcyjną między tymi wielkościami należy wykorzystać równania równowagi i warunki brzegowe, a poszukiwany związek otrzymamy w postaci $\mathbf{A} = f(\mathbf{a})$, tzn.

$$(2.1) \quad \begin{cases} A_1 = f_1(a_1, a_2, \dots, a_n), \\ \vdots \\ A_k = f_k(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Rozwijając w szereg Taylora funkcje A_1, A_2, \dots, A_k wokół punktu $(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0})$ mamy

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A_1 = & f_1(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \right|_{a_1=a_{10}} (a_1 - a_{10}) + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \right|_{a_n=a_{n0}} (a_n - a_{n0}) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_i \partial a_1} \right|_{\substack{a_1=a_{10} \\ a_i=a_{i0}}} (a_1 - a_{10})(a_i - a_{i0}) + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_i \partial a_n} \right|_{\substack{a_n=a_{n0} \\ a_i=a_{i0}}} (a_n - a_{n0})(a_i - a_{i0}) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k = & f_k(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}) + \\ & + \left. \frac{\partial f_k}{\partial a_1} \right|_{a_1=a_{10}} (a_1 - a_{10}) + \dots + \left. \frac{\partial f_k}{\partial a_n} \right|_{a_n=a_{n0}} (a_n - a_{n0}) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\left. \frac{\partial^2 f_k}{\partial a_i \partial a_1} \right|_{\substack{a_1=a_{10} \\ a_i=a_{i0}}} (a_1 - a_{10})(a_i - a_{i0}) + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f_k}{\partial a_i \partial a_n} \right|_{\substack{a_n=a_{n0} \\ a_i=a_{i0}}} (a_n - a_{n0})(a_i - a_{i0}) + \dots, \end{aligned}$$

Przez analizę wrażliwości pierwszego stopnia rozumiemy wyznaczenie macierzy wrażliwości \mathbf{B}

$$(2.3) \quad \begin{bmatrix} \delta A_1 \\ \vdots \\ \delta A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_n \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{B} jest postaci

$$(2.4) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \right|_{a_1=a_{10}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \right|_{a_2=a_{20}} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \right|_{a_n=a_{n0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_k}{\partial a_1} \right|_{a_1=a_{10}} & \left. \frac{\partial f_k}{\partial a_2} \right|_{a_2=a_{20}} & \dots & \left. \frac{\partial f_k}{\partial a_n} \right|_{a_n=a_{n0}} \end{bmatrix}$$

Wprowadźmy wektory kolumnowe drugich wariacji wielkości \mathbf{A} oraz \mathbf{a} oznaczając je odpowiednio $D^2 \mathbf{A}$ i $D^2 \mathbf{a}$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} D^2 \mathbf{A} &= [\delta^2 A_1, \delta^2 A_2, \dots, \delta^2 A_k], \\ D^2 \mathbf{a} &= [\delta^2 a_1, \delta a_2 \delta a_1, \dots, \delta a_n \delta a_1, \\ &\quad \delta^2 a_2, \dots, \delta a_n \delta a_2, \\ &\quad \dots, \\ &\quad \delta^2 a_n] \end{aligned}$$

gdzie wektor $D^2 \mathbf{a}$ ma $m = n(n+1)/2$ składowych.

Przez analizę wrażliwości drugiego stopnia rozumiemy wyznaczenie macierzy \mathbf{C} .

$$(2.6) \quad [D^2 \mathbf{A}]_{k \times 1} = [\mathbf{C}]_{k \times m} [D^2 \mathbf{a}]_{m \times 1},$$

gdzie i -ty wiersz macierzy \mathbf{C} jest postaci

$$(2.7) \quad \mathbf{C}_i = \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial a_1^2} \Big|_{a_1=a_{10}}, 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_2 \partial a_1} \Big|_{\substack{a_1=a_{10} \\ a_2=a_{20}}}, \dots, 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_n \partial a_1} \Big|_{\substack{a_1=a_{10} \\ a_n=a_{n0}}}, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_2^2} \Big|_{a_2=a_{20}}, \dots, 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_n \partial a_2} \Big|_{\substack{a_2=a_{20} \\ a_n=a_{n0}}}, \right. \\ \left. \dots, \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_n^2} \Big|_{a_n=a_{n0}} \right]$$

W podobny sposób można podać definicje analizy wrażliwości kolejnych stopni. Ze względu na znaczenie praktyczne rozważania nasze ograniczymy do badania wrażliwości pierwszego stopnia.

Wprowadźmy jeszcze pojęcie zmiennych wymiarowych i konfiguracyjnych jako parametrów charakteryzujących kształt konstrukcji prętowej i belkowej. Przez zmienne wymiarowe rozumiemy wielkości, zmiana których nie narusza postaci równań statyki konstrukcji. Przykładami takich zmiennych są wymiary przekrojów poprzecznych prętów, belek czy ram.

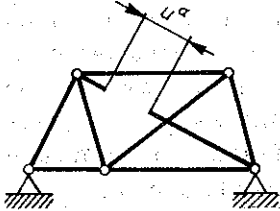
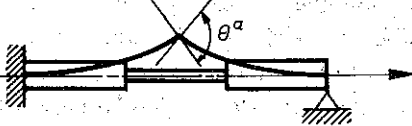
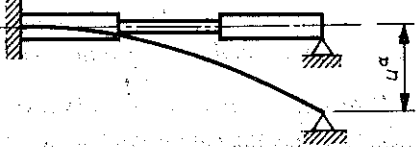
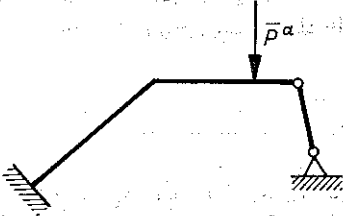
Gdy zmiana wartości zmiennych powoduje zmianę postaci równań statyki konstrukcji (tzn. równań równowagi i warunków brzegowych), to takie wielkości nazwiemy zmiennymi konfiguracyjnymi. Jako przykłady można podać położenie węzłów w kratownicy lub ramie czy długości poszczególnych segmentów swobodnych lub podpartych w belce o skokowo zmiennych polach powierzchni przekrojów.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

3.1. Wprowadzenie

Ze względu na sposób podejścia do zagadnienia i rodzaje stosowanych zmiennych rozważymy trzy rodzaje problemów.

Tablica 1

l.p.	Rodzaj zadania	Typ układu sprzężonego
1	Analiza wrażliwości siły w danym przęcie kratownicy (N)	
2	Analiza wrażliwości momentu gnącego w wybranym punkcie belki (ramy) (Mg)	
3	Analiza wrażliwości składowej reakcji podporowej w wybranym kierunku dla belki (ramy) (R)	
4	Analiza wrażliwości przemieszczenia w wybranym kierunku danego węzła kratownicy czy danego punktu belki (ramy) (w)	

Kratownica z dystorsją (wzajemnym przesunięciem końców przeciętego pręta) u^{α} w badanym przęcie

Belka (rama) z dystorsją kątową θ^{α} w przekroju, w którym badamy moment gnący

Belka (rama) z ugięciem wstępnym u^{α} w kierunku badanej składowej reakcji podporowej

Belka, rama lub kratownica obciążona siłą P^{α} w rozważanym punkcie przyłożoną w badanym kierunku

Jednym z nich są zadania ze zmiennymi wymiarowymi. Sposób ich rozwiązania oprzemy na sprowadzeniu problemu do obliczania wariacji w stałym obszarze, co przy wykorzystaniu równań zasady prac przygotowanych i uzupełniających prac przygotowanych daje natychmiastowe rozwiązanie.

W przypadku zadań ze zmiennymi konfiguracyjnymi należy wyróżnić dwie klasy zagadnień. Pierwsza, to zadania przesuwania brzegu zewnętrznego lub wewnętrznego wraz z podparciem wzdłuż kierunku belki lub odpowied-

niego elementu belkowego w ramie, rozwiązywane na zasadzie przedłużenia i wariacji odpowiednich pól statycznych i kinematycznych. Druga zaś, to zadania przesuwania węzłów kratownic i ram w dowolnym wybranym kierunku. Rozwiązanie ich sprowadza się do zapisu odpowiednich równań o charakterze przyrostowym wynikających z zasad wzajemności, a następnie zastosowaniu do nich wariacyjnych równań równowagi w węzłach.

Zajmiemy się wprowadzeniem pojęcia układu sprzężonego. Nie wdając się w szczegółowe rozważania teoretyczne założymy, że konstrukcją sprzężoną jest konstrukcja o identycznej konfiguracji z konstrukcją podstawową lecz inaczej obciążoną i znajduje się w innych warunkach brzegowych. Sposób definiowania takich konstrukcji można znaleźć w różnych pracach m.in. w pracy DEMSA [5]. Przyjęty sposób obciążenia lub obrane warunki brzegowe w układzie sprzężonym zależą od wielkości, której wrażliwość będziemy badać (iloczyn wielkości badanej i wprowadzonej w konstrukcji sprzężonej ma charakter pracy). W celu praktycznego stosowania tego pojęcia podamy postacie układów sprzężonych dla różnych zadań rozwiązywanych w tej pracy w tablicy 1.

3.2. Analiza wrażliwości wielkości statycznych w ustrojach prętowych i belkowych ze względu na zmiany wartości sztywności

Poniższe rozważania dotyczyć będą zmian sztywności spowodowanych zmianą wartości zmiennych wymiarowych, zmianą wartości stałych sprężystych jak i zmianą wartości obydwu tych czynników jednocześnie.

Oznaczmy sztywność na rozciąganie lub ściskanie i na zginanie i -tego elementu prętowego czy belkowego konstrukcji odpowiednio przez S_i^s oraz S_i^z . Zachodzą następujące zależności:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} S_i^s &= E_i A_i, \\ S_i^z &= E_i J_{yi}, \end{aligned}$$

gdzie A_i , J_{yi} to odpowiednio pole powierzchni przekroju i moment bezwładności, a E_i moduł Younga w i -tym elemencie.

Napişmy zasadę prac wirtualnych dla konstrukcji podstawowych i odpowiadających im układów sprzężonych — w przypadku analizy wrażliwości wielkości statycznych w postaci [11]:

$$(3.2) \quad W + U = \sum_{i=1}^n N_i \Delta l_i^a + \sum_{i=1}^n \int M_g \kappa^a dx_i,$$

gdzie N_i , M_{gi} oznaczają odpowiednio siłę normalną i moment gnący w układzie podstawowym, Δl_i^a , κ^a odpowiednio wydłużenie i krzywiznę w układzie sprzężonym, sumowanie zaś odbywa się po wszystkich elementach prętowych lub

belkowych badanej konstrukcji. Indeks a w powyższej zależności oraz we wszystkich następnym, oznaczać będziemy wielkości dotyczące konstrukcji sprężonych.

We wzorze (3.2) wielkość W oznacza pracę wykonaną przez uogólnione siły zewnętrzne działające w układzie podstawowym, na odpowiednich uogólnionych przemieszczeniach układu sprężonego, co można napisać

$$(3.3) \quad W = \sum_{i=1}^k P_i \Delta_i^a,$$

gdzie P_i to uogólnione siły zewnętrzne, Δ_i^a uogólnione przemieszczenia, sumowanie zaś odbywa się po liczbie obciążeń. U jest pracą badanych wielkości statycznych na wprowadzonych dystorsjach układu sprężonego i w zależności od zadania (tablica 1, punkty 1, 2, 3) przyjmuje jedną z postaci

$$(3.4) \quad U = Nu^a \quad \text{lub} \quad U = M_g \theta^a \quad \text{lub} \quad U = Ru^a.$$

Chcąc napisać zasadę uzupełniających prac przygotowanych, ponieważ interesują nas wariacje wielkości statycznych N , R , M_g , poddajemy pola statyczne zmianom wariacyjnym oraz zachowujemy pola kinematyczne bez zmian, co daje w równaniu analogicznym do (3.2)

$$(3.5) \quad W + (U + \delta U) = \sum_i (N_i + \delta N_i) \Delta_i^a + \sum_{i, l_i} \int (M_g + \delta M_g) \kappa^a dx_i.$$

Odejmując stronami równania (3.2) i (3.5) otrzymujemy [6 i 7]

$$(3.6) \quad \delta U = \sum_i \delta N_i \Delta_i^a + \sum_{i, l_i} \int \delta M_g \kappa^a dx_i,$$

gdzie δU w zależności od zadania oznacza δNu^a , $\delta M_g \theta^a$ lub δRu^a . Ponieważ

$$(3.7) \quad \delta N_i = \delta \left(\frac{\Delta l_i S_i^s}{l_i} \right) = \frac{S_i^s}{l_i} \delta (\Delta l_i) + \frac{\Delta l_i}{l_i} \delta S_i^s,$$

$$\delta M_g = \delta (\kappa S^z) = s^z \delta \kappa + \kappa \delta S^z,$$

przeto wzory (3.6) można przedstawić w postaci

$$(3.8) \quad \delta U = \sum_i N_i^a \delta (\Delta l_i) + \sum_{i, l_i} \int M_g^a \delta \kappa dx_i + \sum_i \frac{N_i N_i^a l_i}{E_i^2 A_i^2} \delta S_i^s +$$

$$+ \sum_{i, l_i} \int \frac{M_g M_g^a}{E^2 J_y^2} dx_i \delta S_i^z.$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, uzyskujemy

$$(3.9) \quad \sum_i N_i^a \delta (\Delta l_i) + \sum_{i, l_i} \int M_g^a \delta \kappa dx_i = \sum_i P_i^a \delta w_i = 0,$$

gdyż

$$P_i^a = 0 \quad \forall_i$$

gdzie P_i^a oznacza obciążenie zewnętrzne układu sprzężonego oraz δw_i wariacje składowych przemieszczeń w kierunku działania sił P_i^a w układzie podstawowym. Wzór (3.8) przyjmuje więc postać

$$(3.10) \quad \delta U = \sum_i \frac{N_i N_i^a l_i}{E_i^2 A_i^2} \delta S_i^s + \sum_i \int_{l_i} \frac{M_g M_g^a}{E^2 J_y^2} dx_i \delta S_i^z.$$

Na podstawie powyższego wzoru możemy wypisać odpowiednie wzory w każdym interesującym nas zadaniu. Wykonajmy to dla kilku przykładowych problemów.

1. Analiza wrażliwości siły w K -tym przęcie kratownicy N_K ze względu na zmiany pól powierzchni przekrojów A_i poszczególnych prętów. Ponieważ

$$\delta S_i^s = E_i \delta A_i,$$

więc uzyskamy

$$(3.11) \quad \delta N_K u_K^a = \sum_i N_i N_i^a \frac{l_i}{E_i A_i^2} \delta A_i.$$

2. Analiza wrażliwości momentu gnącego M_g w danym punkcie belki o skokowo zmiennym polu powierzchni przekroju, prostokątnego kształtu $b_i \times h_i$ — ze względu na zmianę wysokości przekrojów h_i . Ponieważ

$$\delta S_i^z = E_i \delta J_{yi} = \frac{E_i b_i h_i^2}{4} \delta h_i,$$

więc uzyskamy

$$(3.12) \quad \delta M_g \theta^a = \sum_i \int_{l_i} M_g M_g^a dx_i \frac{36}{E_i b_i h_i^4} \delta h_i.$$

Identyczne zależności można również wypisać w przypadku analizy wrażliwości reakcji podporowej badanej belki.

3.3. *Analiza wrażliwości przemieszczeń w ustrojach prętowych i belkowych ze względu na zmiany wartości sztywności*

Ze względu na podobieństwo problemów wszystkie oznaczenia wprowadzone w podrozdziale 3.2 uznajemy za obowiązujące. Oznaczmy odwrotności sztywności jak następuje:

$$(3.13) \quad C_i^s = \frac{1}{S_i^s}, \quad C_i^z = \frac{1}{S_i^z}$$

Napišmy zasadę wzajemności dla układów podstawowych i odpowiadających im układów sprzężonych, w przypadku analizy wrażliwości przemieszczeń, w postaci (tablica 1, punkt 4)

$$(3.14) \quad V = \sum_i N_i \Delta l_i^a + \sum_i \int_{l_i} M_g \kappa^a dx_i,$$

gdzie V oznacza pracę sił zewnętrznych działających w układzie sprzężonym na przemieszczeniach układu podstawowego i można ją przedstawić następująco:

$$(3.15) \quad V = P^a w.$$

Chcąc uzyskać wariację badanego przemieszczenia, należy poddać pola kinematyczne zmianom wariacyjnym, pola zaś statyczne nie ulegną zmianie. W związku z tym pisząc równanie analogiczne do (3.14), znajdziemy

$$(3.16) \quad V + \delta V = \sum_i N_i [\Delta l_i^a + \delta(\Delta l_i^a)] + \sum_i \int_{l_i} M_g (\kappa^a + \delta\kappa^a) dx_i.$$

Odejmując stronami (3.14) od (3.16) otrzymujemy

$$(3.17) \quad \delta V = \sum_i N_i \delta(\Delta l_i^a) + \sum_i \int_{l_i} M_g \delta\kappa^a dx_i.$$

Ponieważ

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \delta(\Delta l_i^a) &= \delta(N_i^a l_i C_i^s) = l_i C_i^s \delta N_i^a + N_i^a l_i \delta C_i^s, \\ \delta(\kappa^a) &= \delta(M_g^a C^z) = C^z \delta M_g^a + M_g^a \delta C^z, \end{aligned}$$

przekształcając wzór (3.17) napiszemy w postaci

$$(3.19) \quad \delta V = \sum_i \Delta l_i \delta N_i^a + \sum_i \int_{l_i} \kappa \delta M_g^a dx_i + \sum_i N_i N_i^a l_i \delta C_i^s + \sum_i \int_{l_i} M_g M_g^a dx_i \delta C_i^z.$$

Na podstawie zasady uzupełniających prac przygotowanych, uzyskujemy

$$(3.20) \quad \sum_i \Delta l_i \delta N_i^a + \sum_i \int_{l_i} \kappa \delta M_g^a dx_i = \sum_{i=1}^m \delta R_i^a u_i = 0,$$

ponieważ $u_i = 0 \forall$, gdzie δR_i^a oznacza wariację reakcji układu sprzężonego, a u_i składową przemieszczenia podpory układu podstawowego, indeks m zaś oznacza liczbę reakcji podporowych.

Wzór (3.19) przyjmuje więc postać

$$(3.21) \quad \delta V = \sum_i N_i N_i^a l_i \delta C_i^s + \sum_i \int_{l_i} M_g M_g^a dx_i \delta C_i^z.$$

Napišmy postać wzoru (3.21) dla kilku konkretnych zadań.

1. Analiza wrażliwości przemieszczenia danego węzła kratownicy ze względu na zmiany pól przekrojów A_i poszczególnych prętów. W tym przypadku

$$\delta C_i^s = \delta \left(\frac{1}{E_i A_i} \right) = - \frac{1}{E_i A_i^2} \delta A_i.$$

Wzór (3.21) przedstawimy więc w następujący sposób:

$$(3.22) \quad P^a \delta w = - \sum_i N_i N_i^a \frac{l_i}{E_i A_i^2} \delta A_i.$$

2. Analiza wrażliwości przemieszczenia w danym punkcie belki o skokowo zmiennym polu powierzchni przekroju ze względu na zmianę wartości modułów Younga E_i .

Ponieważ

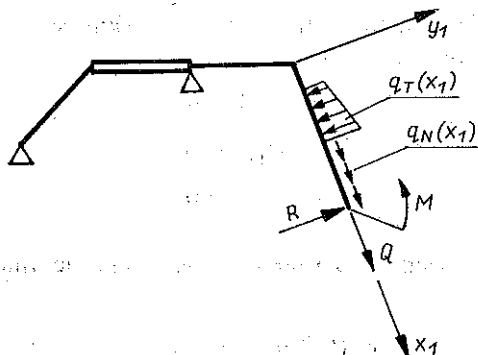
$$\delta C_i^z = \delta \left(\frac{1}{E_i J_{yi}} \right) = - \frac{1}{E_i^2 J_{yi}} \delta E_i,$$

więc zależność (3.21) ma postać

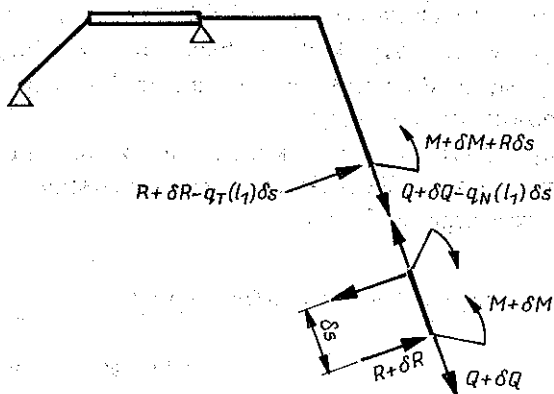
$$(3.23) \quad P^a \delta w = - \sum_i \int_{l_i} M_g M_g^a dx_i \frac{1}{E_i^2 J_{yi}} \delta E_i.$$

3.4. *Analiza wrażliwości wielkości statycznych w ramach i belkach ze względu na przesunięcie brzegu zewnętrznego wraz z podparciem wzdłuż kierunku odpowiedniego elementu belkowego*

Rozważania przedstawione w niniejszym podrozdziale zostaną przeprowadzone dla ram, jednak w oczywisty sposób przenoszą się one również na belki jako szczególny przypadek ram. Wprowadźmy układ współrzędnych $x_1 y_1$ związany z przedłużonym elementem belkowym jak na rys. 1. Pozostałe oznaczenia są następujące: $q_T(x_i)$ oznacza składową normalną obciążenia, $q_N(x_i)$ składową styczną obciążenia, $w_1(x_i)$ składową wektora przemieszczenia wzdłuż osi x_i , $w_2(x_i)$ składową wektora przemieszczenia wzdłuż osi y_i , R składową reakcji przesuwanego podparcia wzdłuż osi y_1 , Q składową reakcji przesuwanego podparcia wzdłuż osi x_1 , M moment utwierdzenia przesuwanego podparcia oraz $x_i y_i$ układ współrzędnych związany z i -tym elementem belkowym. W rozwiązaniu powyższego problemu zastosujemy ideę sprowadzenia do długości pierwotnej elementu belkowego przedłużonego o δs przez skrócenie odpowiednich pól statycznych i kinematycznych. Rozpatrując odpowiednie składowe reakcje przesuniętego podparcia, możemy napisać



Rys. 1. Konstrukcja podstawowa—rama z przedłużonym elementem belkowym o długości l_1 , obciążona obciążeniem ciągłym $q_T(x_1)$, $q_N(x_1)$ oraz dowolnym układem sił i momentów skupionych. Przesuwane podparcie zastąpiono jego reakcjami R , Q , M



Rys. 2. Sprowadzenie przedłużonego elementu belkowego do długości początkowej

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \delta R &= \delta \bar{R} + R_{,x_1} \delta s, \\ \delta Q &= \delta \bar{Q} + Q_{,x_1} \delta s, \\ \delta M &= \delta \bar{M} + M_{,x_1} \delta s, \end{aligned}$$

gdzie δR , δQ , δM przedstawiają całkowite wariacje R , Q , M oraz $\delta \bar{R}$, $\delta \bar{Q}$, $\delta \bar{M}$ są ich wariacjami dla konfiguracji pierwotnej. W związku z tym układ równań (3.24) pozwala wyznaczyć wariację wielkości statycznych dla konfiguracji zmienionej, obciętej do obszaru odpowiadającego konfiguracji pierwotnej (rys. 2):

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \delta \bar{R} &= \delta R - q_T(l_1) \delta s, \\ \delta \bar{Q} &= \delta Q - q_N(l_1) \delta s, \\ \delta \bar{M} &= \delta M + R \delta s. \end{aligned}$$

Uwzględniając fakt, iż warunki brzegowe są takie same dla konfiguracji początkowej i końcowej

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \delta[w_1(l_1)] &= 0, \\ \delta[w_2(l_1)] &= 0, \\ \delta[w'_2(l_1)] &= 0, \end{aligned}$$

możemy dla wielkości kinematycznych napisać równanie analogiczne do (3.25) w postaci

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \delta[\overline{w_1(l_1)}] &= -w'_1(l_1) \delta s, \\ \delta[\overline{w_2(l_1)}] &= -w'_2(l_1) \delta s, \\ \delta[\overline{w'_2(l_1)}] &= -w''_2(l_1) \delta s, \end{aligned}$$

gdzie lewe strony (3.27) oznaczają wariacje dla konfiguracji pierwotnej.

Powyższy sposób podejścia do zagadnień przesuwania brzegu wraz z podparciem zastosujemy we wszystkich problemach rozważanych w niniejszej pracy. Sprowadza się to do napisania równań analogicznych do (3.24)–(3.27) dla każdego z postawionych zadań.

Następny etap opiera się na wykorzystaniu zasad energetycznych. Napiszmy zasadę wzajemności Betti'ego dla układu podstawowego i odpowiedniego układu sprzężonego w formie

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^k P_i A_i^a + M w_2^a(l_1) + R w_2^a(l_1) + Q w_1^a(l_1) + U &= \\ &= R^a w_2(l_1) + Q^a w_1(l_1) + M^a w'_2(l_1), \end{aligned}$$

gdzie $U = 0$, gdy przeprowadzamy analizę wrażliwości którejkolwiek z reakcji (M , R lub Q) przesuwanego podparcia; w pozostałych przypadkach

$$(3.29) \quad U = M_g \theta^a, \quad \text{lub} \quad U = R_u u^a \quad \text{lub} \quad U = Q_u u^a,$$

w zależności od rozważanego zadania (indeksem u oznaczono reakcje na podparciach nieprzesuwanych), sumowanie zaś odbywa się po wszystkich uogólnionych obciążeniach.

Podobnie można napisać zasadę wzajemności dla ramy przedłużonej po obcięciu fragmentu o długość δs oraz uzewnętrznieniu odpowiednich sił wewnętrznych (rys. 2) i odpowiedniej ramy sprzężonej:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^k P_i A_i^a + (M + \delta M + R \delta s) w_2^a(l_1) + [R + \delta R - q_T(l_1) \delta s] w_2^a(l_1) + \\ + [Q + \delta Q - q_N(l_1) \delta s] w_1^a(l_1) + U + \delta U = M^a [w'_2(l_1) - w''_2(l_1) \delta s] + \\ + R^a [w_2(l_1) - w'_2(l_1) \delta s] + Q^a [w_1(l_1) - w'_1(l_1) \delta s] \end{aligned}$$

Odejmując (3.28) od (3.30) otrzymujemy

$$(3.31) \quad \delta M w_2^a(l_1) + \delta R w_2^a(l_1) + \delta Q w_1^a(l_1) + \delta U = -[R w_2^a(l_1) + R^a w_2^a(l_1) + M^a w_2^a(l_1) + Q^a w_1^a(l_1) - q_T(l_1) w_2^a(l_1) - q_N(l_1) w_1^a(l_1)] \delta s.$$

Równanie powyższe stanowi ogólny zapis wszystkich zależności służących do badania wrażliwości wielkości statycznych w ramach ze względu na przesunięcie zewnętrznego brzegu podpartego. Sposób stosowania wzoru (3.31) w konkretnych zadaniach pokażemy na kilku przykładach.

1. Analiza wrażliwości składowej normalnej R reakcji na przesuwanej podporze nieprzesuwnej.

Wtedy

$$U = 0 (\delta U = 0), \quad M = 0 (\delta M = 0), \quad M^a = 0, \quad w_2^a(l_1) = 0, \quad w_1^a(l_1) = 0,$$

oraz $w_2^a(l_1) \neq 0$ oznacza wprowadzone w układzie sprzężonym ugięcie wstępne w kierunku badanej reakcji. Wzór (3.31) przyjmuje więc postać

$$(3.32) \quad \delta R w_2^a(l_1) = -[R w_2^a(l_1) + R^a w_2^a(l_1) + Q^a w_1^a(l_1) - q_T(l_1) w_2^a(l_1)] \delta s.$$

2. Analiza wrażliwości składowej normalnej R_u reakcji na podporze nieprzesuwanej ze względu na przedłużenie elementu belkowego wraz z przesunięciem innej podpory nieprzesuwnej.

W tym przypadku zachodzi

$$U = R_u u^a (\delta U = \delta R_u u^a), \quad M = 0 (\delta M = 0), \quad M^a = 0, \\ w_2^a(l_1) = 0, \quad w_1^a(l_1) = 0, \quad w_2^a(l_1) = 0,$$

(3.31) zaś jest postaci

$$(3.33) \quad \delta R_u u^a = -[R w_2^a(l_1) + R^a w_2^a(l_1) + Q^a w_1^a(l_1)] \delta s.$$

3. Analiza wrażliwości momentu utwierdzenia M w przesuwanym utwierdzeniu.

W tym przypadku mamy

$$U = 0 (\delta U = 0), \quad w_1^a(l_1) = 0, \quad w_2^a(l_1) = 0, \quad w_2^a(l_1) = 0,$$

$w_2^a(l_1) \neq 0$ zaś spełnia rolę wprowadzonej w układzie sprzężonym dystorsji kątowej. Wzór (3.31) przyjmie więc formę

$$(3.34) \quad \delta M w_2^a(l_1) = -[R w_2^a(l_1) + M^a w_2^a(l_1) + Q^a w_1^a(l_1)] \delta s.$$

4. Analiza wrażliwości momentu gnącego w wybranym punkcie ramy ze względu na przedłużenie elementu belkowego wraz z przesunięciem utwierdzenia.

Dla takiego zagadnienia mamy

$$U = M_g \theta^a (\delta U = \delta M_g \theta^a), \quad w_1^a(l_1) = 0, \quad w_2^a(l_1) = 0, \\ w_2'(l_1) = 0, \quad w_2''(l_1) = 0,$$

(3.31) zaś jest postaci

$$(3.35) \quad \delta M_g \theta^a = -[M^a w_2''(l_1) + Q^a w_1'(l_1)] \delta s,$$

3.5. *Analiza wrażliwości przemieszczeń w ramach i belkach ze względu na przesunięcie brzegu zewnętrznego wraz z podparciem wzdłuż kierunku odpowiedniego elementu belkowego*

Napiszmy zasadę wzajemności dla układu sprzężonego (ramy obciążonej siłą P^a w kierunku badanego przemieszczenia) oraz układu podstawowego z rys. 1 bez ugięć wstępnych na poporach w postaci

$$(3.36) \quad P^a w = \sum_{i=1}^k P_i \Delta_i^a$$

Dla skróconej o δs ramy z przesuniętym brzegiem zewnętrznym i odpowiedniego układu sprzężonego zasada wzajemności jest postaci

$$(3.37) \quad P^a (w + \delta w) - [R^a w_2'(l_1) + Q^a w_1'(l_1) + M^a w_2''(l_1)] \delta s = \\ = R w_2''(l_1) \delta s + \sum_{i=1}^k P_i \Delta_i^a + \delta M w_2''(l_1).$$

Odejmując (3.36) od (3.37) otrzymamy poszukiwane równanie pozwalające przeprowadzić analizę wrażliwości przemieszczeń:

$$(3.38) \quad P^a \delta w = [R w_2''(l_1) + R^a w_2'(l_1) + Q^a w_1'(l_1) + M^a w_2''(l_1)] \delta s + \delta M w_2''(l_1).$$

W przypadku przesuwania podpory $M = 0$, $M^a = 0$, $w_2'(l_1) = 0$ i wzór (3.38) przyjmuje postać

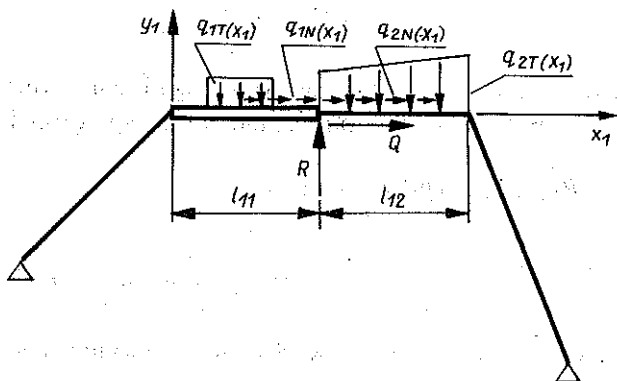
$$(3.39) \quad P^a \delta w = [R w_2''(l_1) + R^a w_2'(l_1) + Q^a w_1'(l_1)] \delta s,$$

a gdy przesuwamy brzeg zewnętrzny wraz z utwierdzeniem, to $w_2'(l_1) = 0$, $w_2''(l_1) = 0$ i wtedy (3.38) można zapisać

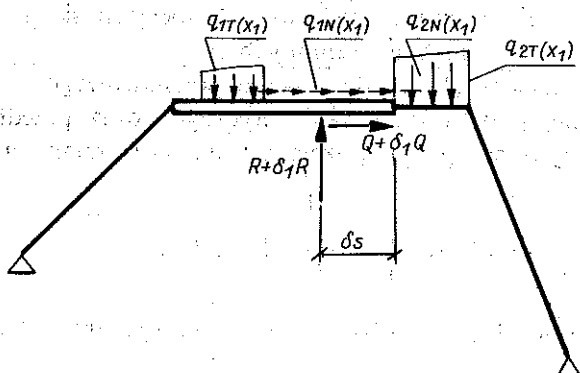
$$(3.40) \quad P^a \delta w = [Q^a w_1'(l_1) + M^a w_2''(l_1)] \delta s.$$

3.6. *Analiza wrażliwości wielkości statycznych w ramach i belkach ze względu na przesunięcie podpartego brzegu wewnętrznego*

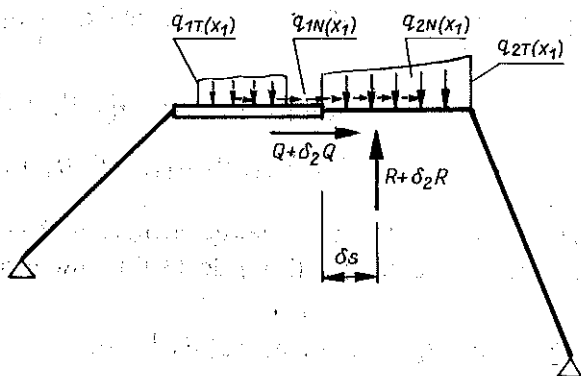
Zadanie powyższe rozważymy jako superpozycję dwóch problemów: przesunięcia brzegu wewnętrznego i przesunięcia podpory, co pokazano na rys. 4 i 5.



Rys. 3. Konstrukcja podstawowa-rama z przesuwającym wraz z podporą brzegiem wewnętrznym obciążona obciążeniem ciągłym $q_T(x_i)$, $q_N(x_i)$ oraz dowolnym układem sił i momentów skupionych. Przesuwaną podporę zastąpiono jej reakcjami R , Q . Zachodzi zależność $l_{11} + l_{12} = l_1$



Rys. 4. Układ podstawowy-rama z przesuniętym o δs brzegiem wewnętrznym



Rys. 5. Układ podstawowy-rama z przesuniętą o δs podporą

Aby rozwiązać pierwsze z wymienionych zagadnień napiszmy zasadę wzajemności dla ramy z rys. 3 i odpowiedniej ramy sprzężonej:

$$(3.41) \quad \sum_{i=1}^k P_i \Delta_i^a + R w_2^a(l_{11}) + Q w_1^a(l_{11}) + U = \\ = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{l_i} M_g \kappa^a dx_i + \int_0^{l_i} N \varepsilon_N^a dx_i \right) = 0,$$

gdzie $\kappa^a = w_2^{a'}$, $\varepsilon_N^a = w_1^{a'}$ a U ma takie samo znaczenie jak w podrozdziale 3.4.

Pierwsze wyrażenie ze wzoru (3.41) napiszemy w postaci

$$(3.42) \quad \sum_{i=1}^k P_i \Delta_i^a = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} q_T(x_i) w_2^a(x_i) dx_i + \int_0^{l_i} q_N(x_i) w_1^a(x_i) dx_i \right] + \sum_{i=1}^m S_i \Delta_i^a,$$

gdzie pierwszy składnik oznacza pracę obciążeń ciągłych na odpowiednich przemieszczeniach, drugi zaś pracę uogólnionych obciążeń skupionych S_i na odpowiednich przemieszczeniach uogólnionych Δ_i^a .

Pisząc zasadę prac wirtualnych dla układu podstawowego z rys. 4 oraz konstrukcji sprzężonej przy wariacji pól statycznych oraz przedłużeniu pól kinematycznych (w tym przypadku pozostaną one bez zmian) znajdziemy

$$(3.43) \quad \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} q_T(x_i) w_2^a(x_i) dx_i + \int_0^{l_i} q_N(x_i) w_1^a(x_i) dx_i \right] + \\ + w_1^a(l_{11}) [q_{1N}(l_{11}) - q_{2N}(l_{11})] \delta s + w_2^a(l_{11}) [q_{1T}(l_{11}) - q_{2T}(l_{11})] \delta s + \\ + \sum_{i=1}^m S_i \Delta_i^a + (R + \delta_1 R) w_2^a(l_{11}) + (Q + \delta_1 Q) w_1^a(l_{11}) + U + \delta_1 U = \\ = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} M_g \kappa^a dx_i + \int_0^{l_i} N \varepsilon_N^a dx_i + \int_0^{l_i} \delta_1 M_g \kappa^a dx_i + \int_0^{l_i} \delta_1 N \varepsilon_N^a dx_i \right] + \\ + [M_{g1}(l_{11}) \kappa_1^a(l_{11}) - M_{g2}(l_{11}) \kappa_2^a(l_{11})] \delta s + \\ + [N_1(l_{11}) \varepsilon_{1N}^a(l_{11}) - N_2(l_{11}) \varepsilon_{2N}^a(l_{11})] \delta s,$$

gdzie indeksem 1 oznaczono wielkości po lewej stronie, a 2 — po prawej stronie przesuwanego brzegu. Odejmując (3.41) do (3.43) i uwzględniając, iż

$$(3.44) \quad \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} \delta_1 M_g \kappa^a dx_i + \int_0^{l_i} \delta_1 N \varepsilon_N^a dx_i \right] = 0,$$

na podstawie zasady prac przygotowanych, otrzymamy rozwiązanie zadania przesunięcia brzegu wewnętrznego:

$$(3.45) \quad \delta_1 R w_2^a(l_{11}) + \delta_1 Q w_1^a(l_{11}) + \delta_1 U = \{M_{g1}(l_{11}) \varkappa_1^a(l_{11}) - M_{g2}(l_{11}) \varkappa_2^a(l_{11}) + N_1(l_{11}) \varepsilon_{1N}^a(l_{11}) - N_2(l_{11}) \varepsilon_{2N}^a(l_{11}) - w_2^a(l_{11}) [q_{1T}(l_{11}) - q_{2T}(l_{11})] - w_1^a(l_{11}) [q_{1N}(l_{11}) - q_{2N}(l_{11})]\} \delta s.$$

Pisząc zasadę wzajemności dla ramy z rys. 5 i odpowiedniego układu sprzężonego

$$(3.46) \quad \sum_{i=1}^k P_i \Delta_i^a + (R + \delta_2 R) [w_2^a(l_{11}) + w_2^a(l_{11}) \delta s] + (Q + \delta_2 Q) [w_1^a(l_{11}) + \varepsilon_{2N}^a(l_{11}) \delta s] + U + \delta_2 U = -[R^a w_2^a(l_{11}) + Q^a \varepsilon_{2N}^a(l_{11})] \delta s,$$

oraz odejmując (3.41) od (3.46) uzyskujemy rozwiązanie zadania przesunięcia podpory:

$$(3.47) \quad \delta_2 R w_2^a(l_{11}) + \delta_2 Q w_1^a(l_{11}) + \delta_2 U = -[R w_2^a(l_{11}) + R^a w_2^a(l_{11}) + Q \varepsilon_{2N}^a(l_{11}) + Q^a \varepsilon_{2N}^a(l_{11})] \delta s.$$

Stosując zasadę superpozycji do (3.45) i (3.47) otrzymujemy

$$(3.48) \quad \delta R w_2^a(l_{11}) + \delta Q w_1^a(l_{11}) + \delta U = \{M_{g1}(l_{11}) \varkappa_1^a(l_{11}) - M_{g2}(l_{11}) \varkappa_2^a(l_{11}) + N_1(l_{11}) \varepsilon_{1N}^a(l_{11}) - N_2(l_{11}) \varepsilon_{2N}^a(l_{11}) - w_2^a(l_{11}) [q_{1T}(l_{11}) - q_{2T}(l_{11})] - w_1^a(l_{11}) [q_{1N}(l_{11}) - q_{2N}(l_{11})] - [R w_2^a(l_{11}) + R^a w_2^a(l_{11}) + Q \varepsilon_{2N}^a(l_{11}) + Q^a \varepsilon_{2N}^a(l_{11})]\} \delta s.$$

Równanie powyższe pozwala na badanie wrażliwości wielkości statycznych ze względu na przesunięcie brzegu wewnętrznego podpartego. Jeśli przeprowadzamy analizę wrażliwości reakcji na przesuwanej podporze, to $U = 0$ oraz $w_1^a(l_{11})$ lub $w_2^a(l_{11})$ spełniają rolę dystorsji wprowadzonych w układzie sprzężonym. W pozostałych przypadkach U przyjmuje jedną z postaci:

$$U = M_g \theta^a \quad \text{lub} \quad U = R_u u^a \quad \text{lub} \quad U = Q_u u^a,$$

przy czym

$$w_1^a(l_{11}) = 0 \quad \text{oraz} \quad w_2^a(l_{11}) = 0.$$

3.7. Analiza wrażliwości przemieszczeń w ramach i belkach ze względu na przesunięcie podpartego brzegu wewnętrznego

Analogicznie do podrozdziału 3.6 problem nasz rozważymy jako superpozycję zadań przesunięcia brzegu wewnętrznego oraz przesunięcia podpory.

Napiszmy zasadę wzajemności dla ramy z rys. 3 i odpowiedniej ramy sprzężonej:

$$(3.49) \quad P^a w = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} M_g \kappa^a dx_i + \int_0^{l_i} N \varepsilon_N^a dx_i \right] = \sum_{i=1}^k P_i A_i^a.$$

Chcąc uzyskać rozwiązanie pierwszego z wymienionych zagadnień poddajmy pola kinematyczne wariacji oraz przedłużmy pola statyczne i zapiszemy to następującym równaniem również wynikającym z zasady wzajemności:

$$(3.50) \quad P^a (w + \delta_1 w) = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} M_g \kappa^a dx_i + \int_0^{l_i} N \varepsilon_N^a dx_i + \int_0^{l_i} M_g \delta_1 \kappa^a dx_i + \right. \\ \left. + \int_0^{l_i} N \delta_1 \varepsilon_N^a dx_i \right] + [M_{g1}(l_{11}) \kappa_1^a(l_{11}) - M_{g2}(l_{11}) \kappa_2^a(l_{11}) + \\ + N_1(l_{11}) \varepsilon_{1N}^a(l_{11}) - N_2(l_{11}) \varepsilon_{2N}^a(l_{11})] \delta s,$$

Odejmując (3.49) od (3.50) i uwzględniając, iż

$$(3.51) \quad \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} M_g \delta_1 \kappa^a dx_i + \int_0^{l_i} N \delta_1 \varepsilon_N^a dx_i \right] = 0,$$

na podstawie zasady uzupełniających prac przygotowanych, otrzymamy rozwiązanie zadania przesunięcia brzegu wewnętrznego w postaci

$$(3.52) \quad P^a \delta_1 w = [M_{g1}(l_{11}) \kappa_1^a(l_{11}) - M_{g2}(l_{11}) \kappa_2^a(l_{11}) + \\ + N_1(l_{11}) \varepsilon_{1N}^a(l_{11}) - N_2(l_{11}) \varepsilon_{2N}^a(l_{11})] \delta s.$$

Pisząc zasadę Bettiego dla układu z rys. 5 i odpowiedniego układu sprzężonego

$$(3.53) \quad P^a (w + \delta_2 w) - [R^a w_2'(l_{11}) + Q^a \varepsilon_{2N}(l_{11})] \delta s = \\ = \sum_{i=1}^k P_i A_i^a + R w_2'^a(l_{11}) \delta s + Q \varepsilon_{2N}^a(l_{11}) \delta s.$$

i odejmując stronami (3.49) od (3.53), otrzymujemy rozwiązanie zadania przesunięcia podpory

$$(3.54) \quad P^a \delta_2 w = [R^a w_2'(l_{11}) + R w_2'^a(l_{11}) + Q^a \varepsilon_{2N}(l_{11}) + Q \varepsilon_{2N}^a(l_{11})] \delta s.$$

Stosując zasady superpozycji do zależności (3.52) i (3.54) rozwiązanie problemu uzyskamy w formie następującej:

$$(3.55) \quad P^a \delta w = [M_{g1}(l_{11}) \kappa_1^a(l_{11}) - M_{g2}(l_{11}) \kappa_2^a(l_{11}) + N_1(l_{11}) \varepsilon_{1N}^a(l_{11}) - \\ - N_2(l_{11}) \varepsilon_{2N}^a(l_{11}) + R^a w_2'(l_{11}) + R w_2'^a(l_{11}) + \\ + Q^a \varepsilon_{2N}(l_{11}) + Q \varepsilon_{2N}^a(l_{11})] \delta s.$$

3.8. Analiza wrażliwości wielkości statycznych w ramach i kratownicach ze względu na przesunięcie wybranego węzła

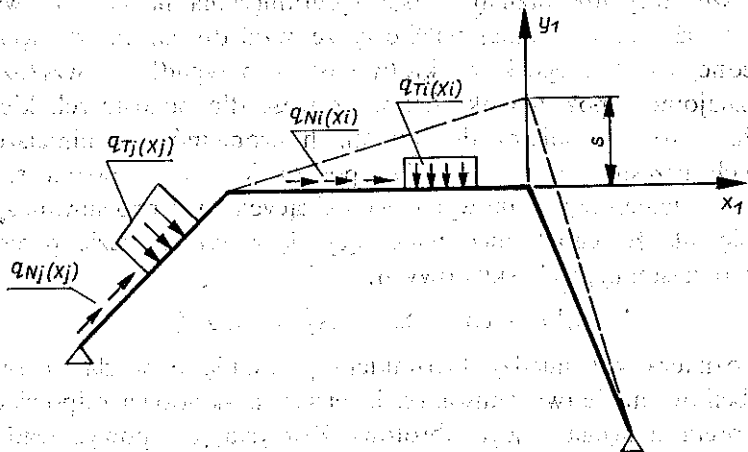
Rozważania nasze przeprowadzimy dla ram, a odpowiedni wynik dla kratownic uzyskamy jako szczególny przypadek rozwiązania dla ram.

Obierzmy globalny układ współrzędnych x, y . Wprowadźmy również lokalne układy współrzędnych związane z poszczególnymi elementami belkowymi i z poszczególnymi węzłami. Ponumerujemy węzły ramy w następujący sposób: numerem jeden oznaczymy węzeł przesuwany, kolejnymi zaś numerami węzły połączone z węzłem przesuwanym za pomocą tylko jednego elementu belkowego w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara itd. Dla elementu belkowego o końcach w węzłach L oraz M ($L < M$) przyjmujemy układ współrzędnych o początku w węźle L i osiach skierowanych tak, że dany i -ty element belkowy leży wzdłuż osi 1_i i odcięte jego punktów są dodatnie oraz układ osi $1_i, 2_i$ tworzy prostokątny prawoskrętny układ współrzędnych (rys. 8). Wprowadźmy także lokalne układy współrzędnych x_j, y_j o początku w j -tym węźle i równoległe do globalnego układu xy (rys. 6).

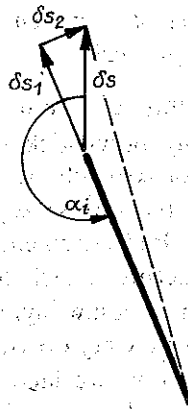
Zauważmy, iż znając wariacje $\delta_x R, \delta_y R$ pewnej wielkości statycznej R ze względu na przesunięcie węzła w dwu wzajemnie prostokątnych kierunkach np. wyznaczonych przez osie układu x_1, y_1 (przesunięcia te oznaczymy odpowiednio przez $\delta t, \delta s$), znamy jednocześnie wariację tej wielkości δR ze względu na przesunięcie węzła w dowolnym kierunku (oznaczymy go przez δp), co wynika ze wzoru

$$(3.56) \quad \delta R = c_1 \delta_x R + c_2 \delta_y R,$$

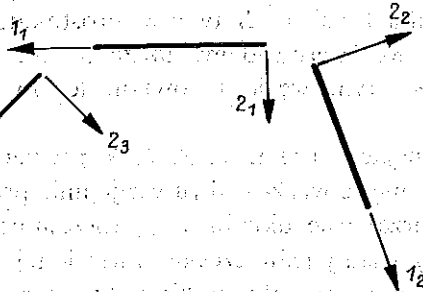
gdzie c_1, c_2 to cosinusy kierunkowe wektora przesunięcia δp w układzie x_1, y_1 .



Rys. 6. Konstrukcja podstawowa—rama z przesuniętym o długość s węzłem, obciążona obciążeniem ciągłym $q_{Tj}(x_j), q_{Ni}(x_i)$ oraz dowolnym układem sił i momentów skupionych.



Rys. 7



Rys. 8. Sposób wprowadzenia lokalnych układów współrzędnych

Zaobserwujemy również, że wzory określające wariacje badanej wielkości ze względu na przesunięcie węzła o δs wzdłuż osi y_1 oraz o δt wzdłuż osi x_1 mają identyczny charakter.

Powyższe fakty upoważniają nas do ograniczenia naszych rozważań do zbadania wrażliwości badanej wielkości ze względu na przesunięcie węzła wzdłuż jednego wybranego kierunku (w naszym przypadku — wzdłuż osi y_1), gdyż jej znajomość pozwala określić wrażliwość dla pozostałych kierunków. Spostrzeżenie to zastosujemy do wszystkich problemów w niniejszej pracy dotyczących przesuwania węzłów. Na podstawie rys. 7 można stwierdzić, iż każdy z elementów belkowych wchodzących do przesuwanego węzła zmienia się tak, że jego koniec znajdujący się w tymże węźle przesunie się o wektor o następujących składowych:

$$(3.57) \quad \delta s_1^{(i)} = -\cos \alpha_i \delta s, \quad \delta s_2^{(i)} = \sin \alpha_i \delta s,$$

gdzie α_i oznacza kąt między kierunkiem przesunięcia węzła, a i -tym elementem belkowym. Łatwo zauważyć, iż pierwsza składowa odpowiada przedłużeniu pręta, a druga — jego obrotowi. Korzystając z powyższego zadanie nasze możemy rozłożyć na dwa niezależne podzadania, tzn. problemy wariacji wielkości statycznych ze względu na: a) zmiany długości poszczególnych

elementów belkowych, b) obroty poszczególnych elementów belkowych (bez zmiany długości). Pierwszy z wymienionych problemów jest analogiczny do rozważanego w podrozdziale 3.4. W związku z tym nie przeprowadzając szczegółowych rachunków podamy jego rozwiązanie:

$$(3.58) \quad \delta_1 U = \left\{ \sum_{i=1}^m [M_{gi}^a(0) w_{2i}''(0) + N_i^a(0) w_{1i}'(0) - T_i^a(0) w_{2i}'(0) - \right. \\ \left. - T_i(0) w_{2i}''(0) + q_{Ti}(0) w_{2i}'(0) + q_{Ni}(0) w_{1i}'(0)] \cos \alpha_i \right\} \delta s,$$

gdzie $\delta_1 U$ oznacza iloczyn odpowiedniej dystorsji wprowadzonej w układzie sprzężonym i wariacji badanej wielkości statycznej ze względu na zmiany długości poszczególnych elementów belkowych; M_{gi}^a , N_i^a , T_i^a oznaczają siły wewnętrzne w układzie współrzędnych związanym z i -tym elementem belkowym ramy sprzężonej, T_i — siłę tnącą w układzie współrzędnych związanym z i -tym elementem belkowym ramy podstawowej oraz w_{1i} składową przemieszczenia wzdłuż osi 1_i układu $1_i 2_i$, w_{2i} — składową przemieszczenia wzdłuż osi 2_i oraz m liczbę elementów belkowych wchodzących do przesuwanego węzła.

Rozważmy z kolei drugie z wymienionych zagadnień, tzn. obroty poszczególnych belek wchodzących do przesuwanego węzła. Ideę rozwiązania tego zadania oprzemy na wprowadzeniu takiej definicji wariacji (oznaczać ją będziemy indeksem 2), która pozwoli nam badać zmiany wielkości niezależnie od obrotu, a jedynie przez porównanie ich w pierwotnym lokalnym układzie współrzędnych i w obróconym lokalnym układzie współrzędnych. Powyższy sposób opisu zmian pewnych wielkości jest stosowany i odpowiada definicji przyrostu lub pochodnej korotacyjnej typu Zaremby–Jaumanna [6].

Na podstawie zasady Bettiego i zasady prac wirtualnych (pomijając wpływ sił tnących) dla ramy podstawowej i odpowiedniej ramy sprzężonej możemy napisać

$$(3.59) \quad \sum_{i=1}^n \left(\int_{l_i} M_{gi}^a w_{2i}'' dx_i + \int_{l_i} N_i^a w_{1i}' dx_i \right) = 0,$$

gdzie poszczególne wielkości są podane w lokalnych układach współrzędnych związanych z elementami, l_i zaś oznacza długość i -tego elementu belkowego; n oznacza liczbę elementów belkowych. Równanie analogiczne do (3.59) dla ram z obróconymi elementami belkowymi jest postaci

$$(3.60) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{l_i} (M_{gi}^a + \delta_2 M_{gi}^a) [w_{2i}'' + \delta_2 (w_{2i}'')] dx_i + \right. \\ \left. + \int_{l_i} (N_i^a + \delta_2 N_i^a) [w_{1i}' + \delta_2 (w_{1i}')] dx_i \right\} = 0.$$

Odejmując stronami równanie (3.59) od (3.60) i pomijając małe wyższego rzędu otrzymamy

$$(3.61) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{l_i} [\delta_2 M_{gi}^a w_{2i}'' + M_{gi}^a \delta_2 (w_{2i}'')] dx_i + \right. \\ \left. + \int_{l_i} [\delta_2 N_i^a w_{1i}' + N_i^a \delta_2 (w_{1i}')] dx_i \right\} = 0.$$

Ponieważ zachodzą zależności

$$(3.62) \quad \delta_2 (w_{2i}'') = \frac{\delta_2 M_{gi}^a}{E_i J_i},$$

$$(3.63) \quad \delta_2 (w_{1i}') = \frac{\delta_2 N_i^a}{E_i A_i},$$

więc równanie (3.61) przyjmuje postać

$$(3.64) \quad \sum_{i=1}^n \left[\int_{l_i} (\delta_2 M_{gi}^a w_{2i}'' + \delta_2 M_{gi}^a w_{2i}'') dx_i + \int_{l_i} (\delta_2 N_i^a w_{1i}' + \delta_2 N_i^a w_{1i}') dx_i \right] = 0.$$

Dla poszczególnych elementów belkowych, całkując przez części możemy napisać wzory

$$(3.65) \quad \int_{l_i} M_{gi} w_{2i}'' dx_i = |M_{gi} w_{2i}''|_0^{l_i} - |T_i w_{2i}''|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} q_{Ti} w_{2i}'' dx_i + \sum_{j=1}^{m_{1i}} S_j^{(1)} \Delta_j^{(1)a},$$

$$\int_{l_i} M_{gK} w_{2K}'' dx_K = |M_{gK} w_{2K}''|_0^{l_K} - |T_K w_{2K}''|_0^{l_K} + \int_0^{l_K} q_{TK} w_{2K}'' dx_K + \sum_{j=1}^{m_{1K}} S_j^{(1)} \Delta_j^{(1)a} + U_1,$$

oraz

$$(3.66) \quad \int_{l_i} N_i w_{1i}' dx_i = |N_i w_{1i}'|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} q_{Ni} w_{1i}' dx_i + \sum_{j=1}^{m_{2i}} S_j^{(2)} \Delta_j^{(2)a},$$

$$\int_{l_K} N_K w_{1K}' dx_K = |N_K w_{1K}'|_0^{l_K} + \int_0^{l_K} q_{NK} w_{1K}' dx_K + \sum_{j=1}^{m_{2K}} S_j^{(2)} \Delta_j^{(2)a} + U_2,$$

a także

$$(3.67) \quad \int_{l_i} M_{gi}^a w_{2i}'' dx_i = |M_{gi}^a w_{2i}''|_0^{l_i} - |T_i^a w_{2i}''|_0^{l_i},$$

$$(3.68) \quad \int_{l_i} N_i^a w_{1i}' dx_i = |N_i^a w_{1i}'|_0^{l_i} - |T_i^a w_{1i}'|_0^{l_i},$$

gdzie K oznacza element zawierający punkt, w którym badamy siłę wewnętrzną lub reakcję. Sumy

$$\sum_{j=1}^{m_{1i}} S_j^{(1)} \Delta_j^{(1)a} \quad \text{lub} \quad \sum_{j=1}^{m_{2i}} S_j^{(2)} \Delta_j^{(2)a},$$

określają pracę odpowiednich obciążeń skupionych na przemieszczeniach uogólnionych w i -tym elemencie belkowym oraz

$$U = \begin{cases} U_1 & \text{gdy interesuje nas wrażliwość momentu gnącego lub składowej reakcji prostopadłej do elementu belkowego i } U_1 = \\ & = M_g \theta^a \text{ albo } U_1 = R u^a, \\ U_2 & \text{gdy interesuje nas wrażliwość reakcji stycznej do elementu belkowego lub siły normalnej w wybranym punkcie i} \\ & U_2 = Q u^a \text{ albo } U_2 = N u^a. \end{cases}$$

Wypisując podobne wzory dla ustroju z obróconymi elementami belkowymi przy polach statycznych poddanych wariacji i niezmiennych polach kinematycznych (ponieważ zadanie rozważamy w stałym obszarze), a następnie biorąc odpowiednie różnice otrzymamy następujące wzory wariacyjne:

$$(3.69) \quad \int_{l_i} \delta_2 M_{gi} w_{2i}''^a dx_i = |\delta_2 M_{gi} w_{2i}''^a|_0^{l_i} - |\delta_2 T_i w_{2i}^a|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \delta q_{Ti} w_{2i}^a dx_i \quad \forall_{i \neq K},$$

$$\int_{l_K} \delta_2 M_{gK} w_{2K}''^a dx_K = |\delta_2 M_{gK} w_{2K}''^a|_0^{l_K} - |\delta_2 T_K w_{2K}^a|_0^{l_K} + \int_0^{l_K} \delta q_{TK} w_{2K}^a dx_K + \delta_2 U_1,$$

oraz

$$(3.70) \quad \int_{l_i} \delta_2 N_i w_{1i}'^a dx_i = |\delta_2 N_i w_{1i}'^a|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \delta q_{Ni} w_{1i}'^a dx_i \quad \forall_{i \neq K},$$

$$\int_{l_K} \delta_2 N_K w_{1K}'^a dx_K = |\delta_2 N_K w_{1K}'^a|_0^{l_K} + \int_0^{l_K} \delta q_{NK} w_{1K}'^a dx_K + \delta_2 U_2,$$

a także

$$(3.71) \quad \int_{l_i} \delta_2 M_{gi}^a w_{2i}'' dx_i = |\delta_2 M_{gi}^a w_{2i}''|_0^{l_i} - |\delta_2 T_{i0}^a w_{2i}|_0^{l_i} \quad \forall_i,$$

$$(3.72) \quad \int_{l_i} \delta_2 N_i^a w_{1i}' dx_i = |\delta_2 N_i^a w_{1i}'|_0^{l_i} \quad \forall_i,$$

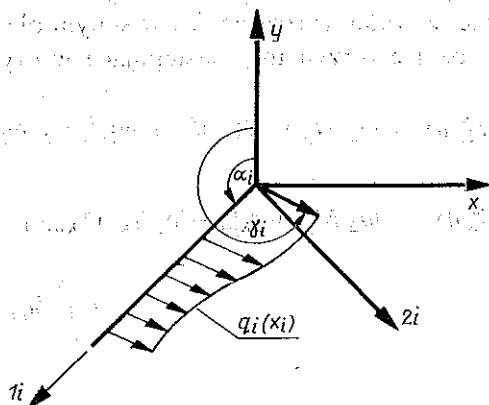
gdzie δq_{Ti} , δq_{Ni} oznaczają wariacje składowych normalnej i stycznej obciążenia ciągłego, wariacje zaś składowych sił skupionych przyjęto jako zerowe zakładając, że zachowują niezmienny kierunek działania w stosunku do elementu, na który oddziałują. W przypadku obciążenia ciągłego obracającego się wraz z elementem belkowym (nie zmieniającego wartości odpowiednich składowych w układzie związanym z obracającym się elementem) wariacje δq_{Ti}

δq_{Ni} będą również równe zero. W przypadku obciążenia nie obracającego się wraz z elementem belkowym (jego składowe nie zmieniają wartości w globalnym układzie współrzędnych) wariacje δq_{Ti} , δq_{Ni} łatwo jest wyznaczyć, co pokażemy niżej.

Na podstawie rysunku 9 możemy napisać

$$(3.73) \quad \begin{aligned} q_{Ni}(x_i) &= q_i(x_i) \cos(\gamma_i - \alpha_i), \\ q_{Ti}(x_i) &= q_i(x_i) \sin(\gamma_i - \alpha_i), \end{aligned}$$

gdzie γ_i oznacza kąt między osią y układu x, y , a kierunkiem działania obciążenia zewnętrznego.



Rys. 9

Licząc wariacje obydwu stron przy wykorzystaniu równań (3.82), otrzymujemy wzory na wariacje odpowiednich składowych obciążenia:

$$(3.74) \quad \begin{aligned} \delta q_{Ni}(x_i) &= \left(\sin \gamma_i \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} - \cos \gamma_i \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} \right) q_i(x_i) \delta s, \\ \delta q_{Ti}(x_i) &= - \left(\sin \gamma_i \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} + \cos \gamma_i \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} \right) q_i(x_i) \delta s. \end{aligned}$$

Analogicznie można wyznaczyć wariacje składowych sił skupionych, gdy nie zachowują kierunku działania w stosunku do elementu belkowego, na który oddziałują.

Podstawiając (3.69)–(3.72) do (3.64) otrzymamy

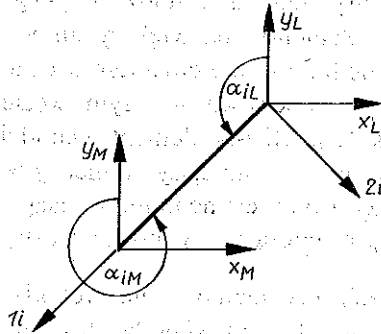
$$(3.75) \quad \delta_2 U = - \sum_{i=1}^n \{ |\delta_2 M_{gi}^a w_{2i}^l|_0 + |\delta_2 M_{gi} w_{2i}^a|_0 -$$

$$(3.75) \quad -\left\{ \delta_2 T_i^a w_{2i}|_0^l - \delta_2 T_i w_{2i}|_0^l + \delta_2 N_i^a w_{1i}|_0^l + \delta_2 N_i w_{1i}|_0^l + \int_0^l \delta q_{Ti} w_{2i}^a dx_i + \int_0^l \delta q_{Ni} w_{1i}^a dx_i \right\}.$$

Przedstawmy wzór (3.75) we współrzędnych globalnego układu x, y .

Składowe wektora przemieszczenia w_{1i}, w_{2i} wyrazimy w składowych tegoż wektora w globalnym układzie współrzędnych x, y , w następujący sposób:

$$(3.76) \quad \begin{aligned} w_{1i} &= w_{yi} \cos \alpha_i + w_{xi} \cos \beta_i, \\ w_{2i} &= -w_{yi} \sin \alpha_i - w_{xi} \sin \beta_i, \end{aligned}$$



Rys. 10

gdzie $\beta_i = \alpha_i + \pi/2$ oznacza kąt między osią x , a elementem belkowym. Wyrażając wzory (3.71) oraz (3.72) w rozwiniętej postaci dla i -tego elementu belkowego o węzłach L, M ($L < M$) przy wykorzystaniu (3.76) oraz przechodząc do układów współrzędnych x_L, y_L i x_M, y_M związanych z tymi węzłami i równoległych do x, y (rys. 10), otrzymamy

$$(3.77) \quad \begin{aligned} \int_L^M \delta_2 M_{gi}^a w_{2i}'' dx_i &= \delta_2 M_{gi}^a(l_i) w_{2i}'(l_i) - \delta_2 M_{gi}^a(0) w_{2i}'(0) + \\ &+ \delta_2 T_i^a(0) [-w_{yL} \sin \alpha_{iL} - w_{xL} \sin \beta_{iL}] + \\ &+ \delta_2 T_i^a(l_i) [-w_{yM} \sin \alpha_{iL} - w_{xM} \sin \beta_{iL}], \\ \int_L^M \delta_2 N_i^a w_{1i}' dx_i &= -\delta_2 N_i^a(0) [w_{yL} \cos \alpha_{iL} + w_{xL} \cos \beta_{iL}] - \\ &- \delta_2 N_i^a(l_i) [w_{yM} \cos \alpha_{iL} + w_{xM} \cos \beta_{iL}]. \end{aligned}$$

Podstawiając do wzoru (3.75) wyrażenia (3.77) oraz przedstawione analogicznie (3.69) i (3.70), a następnie porządkując ze względu na przemieszczenia poszczególnych węzłów, otrzymamy

$$(3.78) \quad \delta_2 U = \sum_{j=1}^l [w_{xj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^q \delta_2 N_{ij}^a \right) + w_{yj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^q \delta_2 N_{ij} \right) +$$

$$(3.78) \quad \begin{aligned} & + w_{xj} \left(\sum_{i=1}^n b_{1i}^{(j)} \delta_2 T_{ij} \right) + w_{xj} \left(\sum_{i=1}^n b_{2i}^{(j)} \delta_2 T_{ij} \right) + w_{yj} \left(\sum_{i=1}^n a_{2i}^{(j)} \delta_2 N_{ij} \right) + \\ & + w_{yj} \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}^{(j)} \delta_2 N_{ij} \right) + w_{yj} \left(\sum_{i=1}^n b_{2i}^{(j)} \delta_2 T_{ij} \right) + w_{yj} \left(\sum_{i=1}^n b_{1i}^{(j)} \delta_2 T_{ij} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^m \left(\int_0^{l_i} \delta q_{Ti} w_{2i}^a dx_i + \int_0^{l_i} \delta q_{Ni} w_{1i}^a dx_i \right), \end{aligned}$$

gdzie $\delta_2 N_{ij}$, $\delta_2 N_{ij}^a$, $\delta_2 T_{ij}$, $\delta_2 T_{ij}^a$ oznaczają wariacje sił wewnętrznych w j -tym węźle i i -tym elemencie belkowym; l oznacza liczbę węzłów w ramie zaś

$$(3.79) \quad a_{1i}^{(j)} = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } i\text{-ty element nie wchodzi do } j\text{-tego wężła,} \\ \cos \beta_i, & \text{jeżeli } i\text{-ty element wchodzi do } j\text{-tego wężła, a drugi z węzłów} \\ & \textit{i-tego elementu ma większy numer } (j < k), \text{ gdzie } \beta_i \text{ oznacza} \\ & \textit{kąt między } i\text{-tym elementem a osią } x_j \text{ układu współrzędnych} \\ & x_j, y_j \text{ o początku w } j\text{-tym węźle i równoległego do } xy, \\ -\cos \beta_i, & \text{jeżeli } i\text{-ty element wchodzi do } j\text{-tego wężła, a drugi} \\ & \textit{z węzłów ma mniejszy numer } (j > k), \text{ gdzie } \beta_i \text{ oznacza kąt} \\ & \textit{między } i\text{-tym elementem, a osią } x_k \text{ układu współrzędnych} \\ & x_k, y_k \text{ o początku w } k\text{-tym węźle i równoległego do } x, y; \end{cases}$$

$$a_{2i}^{(j)} = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } i\text{-ty element nie wchodzi do } j\text{-tego wężła,} \\ \cos \alpha_i, & \text{jeżeli } i\text{-ty element wchodzi do } j\text{-tego wężła, a drugi z węzłów} \\ & \textit{i-tego elementu ma większy numer } (j < k), \text{ gdzie } \alpha_i \text{ oznacza} \\ & \textit{kąt między } i\text{-tym elementem a osią } y_j \text{ układu współrzędnych} \\ & x_j, y_j, \\ -\cos \alpha_i, & \text{jeżeli } i\text{-ty element wchodzi do } j\text{-tego wężła,} \\ & \textit{a drugi z węzłów ma mniejszy numer } (j > k), \text{ gdzie } \alpha_i \\ & \textit{oznacza kąt między } i\text{-tym elementem a osią } y_k \text{ układu} \\ & \textit{współrzędnych } x_k, y_k. \end{cases}$$

Współczynniki b_{1i} , b_{2i} definiujemy analogicznie, zastępując funkcję cosinus funkcją sinus. Należy zauważyć, że składniki związane z wariacjami momentów gnących wyzerowały się. Wynika to z postaci wariacyjnych równań równowagi dla momentu w węzłach. Wyrażenia w nawiasach zwykłych prawej strony wzoru (3.78) można przedstawić w dogodnej postaci dzięki wariacyjnym równaniom równowagi dla sił w węzłach.

Napiszmy więc równania równowagi dla j -tego wężła ramy podstawowej:

$$(3.80) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{1i}^{(j)} N_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{1i}^{(j)} T_{ij} + P_{xj} + R_{xj} = 0, \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}^{(j)} N_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{2i}^{(j)} T_{ij} + P_{yj} + R_{yj} = 0, \end{cases}$$

gdzie P_{xj} , P_{yj} oznaczają składowe obciążenia zewnętrznego przyłożonego do j -tego wężła, R_{xj} , R_{yj} składowe reakcji w j -tym węźle.

Wariacyjne równania równowagi dla zagadnienia obrotu elementów belkowych, przyjmują więc formę

$$(3.81) \quad \sum_{i=1}^n a_{1i}^{(j)} \delta_2 N_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{1i}^{(j)} \delta_2 T_{ij} + \delta_2 R_{xj} = - \left(\sum_{i=1}^n N_{ij} \delta a_{1i}^{(j)} + \sum_{i=1}^n T_{ij} \delta b_{1i}^{(j)} \right),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{2i}^{(j)} \delta_2 N_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{2i}^{(j)} \delta_2 T_{ij} + \delta_2 R_{yj} = - \left(\sum_{i=1}^n N_{ij} \delta a_{2i}^{(j)} + \sum_{i=1}^n T_{ij} \delta b_{2i}^{(j)} \right).$$

Wariacje współczynników $\delta a_{1i}^{(j)}$, $\delta a_{2i}^{(j)}$, $\delta b_{1i}^{(j)}$, $\delta b_{2i}^{(j)}$ uzyskamy na podstawie rozważań geometrycznych:

$$(3.82) \quad \delta(\cos \alpha_i) = - \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} \delta s,$$

$$\delta(\cos \beta_i) = - \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} \delta s,$$

$$\delta(\sin \alpha_i) = \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} \delta s,$$

$$\delta(\sin \beta_i) = - \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} \delta s.$$

Analogicznie do wzorów (3.80) i (3.81) możemy również napisać wzory dla ramy sprzężonej.

Podstawiając do (3.78) prawe strony wariacyjnych równań równowagi, zarówno dla ustroju podstawowego jak i sprzężonego, otrzymamy rozwiązanie zadania analizy wrażliwości wielkości statycznych ze względu na obroty poszczególnych elementów belkowych o stałej długości:

$$(3.83) \quad \delta_2 U = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} (N_{i1}^a w_{y1} - N_{ik}^a w_{yk} + N_{i1} w_{y1}^a - N_{ik} w_{yk}^a + \right.$$

$$+ T_{i1}^a w_{x1} - T_{ik}^a w_{xk} + T_{i1} w_{x1}^a - T_{ik} w_{xk}^a) + \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} (N_{i1}^a w_{x1} - N_{ik}^a w_{xk} +$$

$$+ N_{i1} w_{x1}^a - N_{ik} w_{xk}^a + T_{ik}^a w_{yk} - T_{i1}^a w_{y1} + T_{ik} w_{yk}^a - T_{i1} w_{y1}^a) \left. \right] \delta s -$$

$$- \sum_{i=1}^m \left(\int_0^{l_i} \delta q_{Ti} w_{2i}^a dx_i + \int_0^{l_i} \delta q_{Ni} w_{1i}^a dx_i \right),$$

gdzie indeks k oznacza numer węzła i -tego elementu belkowego wchodzącego do węzłów 1 oraz k .

Stosując zasadę superpozycji do równań (3.58) i (3.85) otrzymamy rozwiązanie zagadnienia analizy wrażliwości pierwszego stopnia wielkości statycznych ze względu na przesunięcie wybranego węzła:

$$\begin{aligned}
 (3.84) \quad \delta U = \sum_{i=1}^m \left\{ [M_{gi1}^a w_{2i}''(0) + N_{i1}^a w_{1i}'(0) - T_{i1}^a w_{2i}'(0) - T_{i1} w_{2i}^a(0) + \right. \\
 + q_{Ti}(0) w_{2i}^a(0) + q_{Ni}(0) w_{1i}^a(0)] \cos \alpha_i + \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} (N_{i1}^a w_{y1} - \\
 - N_{ik}^a w_{yk} + N_{i1} w_{y1}^a - N_{ik} w_{yk}^a + T_{i1}^a w_{x1} - T_{ik}^a w_{xk} + \\
 + T_{i1} w_{x1}^a - T_{ik} w_{xk}^a) + \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} (N_{i1}^a w_{x1} - N_{ik}^a w_{xk} + \\
 + N_{i1} w_{x1}^a - N_{ik} w_{xk}^a + T_{ik}^a w_{yk} - T_{i1}^a w_{y1} + T_{ik} w_{yk}^a - T_{i1} w_{y1}^a) \left. \right\} \delta s - \\
 - \sum_{i=1}^m \left(\int_0^{l_i} \delta q_{Ti} w_{2i}^a dx_i + \int_0^{l_i} \delta q_{Ni} w_{1i}^a dx_i \right).
 \end{aligned}$$

Należy zauważyć, iż część wielkości (przemieszczenia węzłów) są podane w globalnym układzie współrzędnych x, y . Aby ujednoclić zapis można zastosować wzory transformacyjne odwrotne do równań (3.76) i w ten sposób uzyskamy postać poszukiwanych zależności operującą tylko lokalnymi układami współrzędnych, związanymi z poszczególnymi elementami belkowymi.

W przypadku analizy wrażliwości kratownic wzór (3.59) zawiera tylko składnik związany z siłami normalnymi. W konsekwencji tego faktu we wzorze (3.84) znikną wszystkie wyrażenia zawierające wartości momentów gnących i sił tnących, a także (ponieważ kratownica obciążona jest tylko w węzłach) obciążeń ciągłych. Tak więc rozwiązanie zadania analizy wrażliwości wielkości statycznych ze względu na przesunięcie węzła kratownicy można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 (3.85) \quad \delta U = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{N_i^a N_i}{E_i A_i} \cos \alpha_i + \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} [N_i^a (w_{y1} - w_{yk}) + N_i (w_{y1}^a - w_{yk}^a)] + \right. \\
 \left. + \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} [N_i^a (w_{x1} - w_{xk}) + N_i (w_{x1}^a - w_{xk}^a)] \right\} \delta s.
 \end{aligned}$$

3.9. Analiza wrażliwości przemieszczeń w ramach i kratownicach ze względu na przesunięcie wybranego węzła

Rozwiązanie zagadnienia dla kratownic podobnie jak w poprzednim podrozdziale można potraktować jako szczególny przypadek rozwiązania dla ram.

Rozważany problem będziemy rozwiązywać jako wynik superpozycji zagadnień analizy wrażliwości przemieszczeń ze względu na zmiany długości poszczególnych elementów belkowych oraz ze względu na obroty elementów

belkowych o stałej długości. Pierwsze z wymienionych zadań jest analogiczne do rozważanego w podrozdziale 3.5. W związku z tym nie przeprowadzając szczegółowych rachunków podamy jego rozwiązanie:

$$(3.86) \quad P^a \delta_1 w = \left\{ \sum_{i=1}^m [T_{i1}^a w'_{2i}(0) + T_{i1} w''_{2i}(0) - M_{gi1}^a w''_{2i}(0) - N_{i1}^a w'_{1i}(0) - q_{Ti}(0) w''_{2i}(0) - q_{Ni}(0) w'_{1i}(0)] \cos \alpha_i \right\} \delta s,$$

gdzie oznaczenia prawej strony odpowiadają przyjętym we wzorze (3.58).

Rozważmy teraz drugie z wymienionych zagadnień, tzn. obroty poszczególnych belek wchodzących do przesuwanego węzła. Korzystając z zasady Bettiego i zasady prac wirtualnych przy uwzględnieniu momentów gnących i sił normalnych dla ram podstawowej i sprzężonej, możemy napisać

$$(3.87) \quad P^a w = \sum_{i=1}^n \left(\int_{l_i} M_{gi} w''_{2i} dx_i + \int_{l_i} N_i w'_{1i} dx_i \right),$$

przy oznaczeniach prawej strony jak w (3.59).

Równanie analogiczne do (3.87) dla ram z elementami belkowymi obróconymi jest postaci

$$(3.88) \quad P^a (w + \delta_2 w) = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{l_i} (M_{gi} + \delta_2 M_{gi}) [w''_{2i} + \delta_2 (w''_{2i})] dx_i + \int_{l_i} (N_i + \delta_2 N_i) [w'_{1i} + \delta_2 (w'_{1i})] dx_i \right\}$$

Odejmując stronami równanie (3.87) od (3.88) i pomijając małe wyższego rzędu, otrzymamy

$$(3.89) \quad P^a \delta_2 w = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{l_i} [\delta_2 M_{gi} w''_{2i} + M_{gi} \delta_2 (w''_{2i})] dx_i + \int_{l_i} [\delta_2 N_i w'_{1i} + N_i \delta_2 (w'_{1i})] dx_i \right\}$$

Ponieważ zachodzą wzory

$$(3.90) \quad \delta_2 (w''_{2i}) = \frac{\delta_2 M_{gi}^a}{E_i J_i},$$

oraz

$$(3.91) \quad \delta_2 (w'_{1i}) = \frac{\delta_2 N_i^a}{E_i A_i},$$

przekształcając równanie (3.89) przyjmuje postać

$$(3.92) \quad P^a \delta_2 w = \sum_{i=1}^n \left[\int_{l_i} (\delta_2 M_{gi}^a w''_{2i} + \delta_2 M_{gi} w''_{2i}) dx_i + \int_{l_i} (\delta_2 N_i^a w'_{1i} + \delta_2 N_i w'_{1i}) dx_i \right],$$

Łatwo zauważyć, iż prawa strona równania (3.92) jest identyczną z równaniem (3.64). W związku z tym możemy zastosować rozumowanie stosowane do wzorów (3.65)–(3.83) i otrzymamy rozwiązanie zadania analizy wrażliwości przemieszczenia ze względu na obroty elementów belkowych w postaci analogicznej do (3.83).

Stosując zasadę superpozycji do wyników z obydwu podproblemów, uzyskamy rozwiązanie zadania analizy wrażliwości przemieszczenia w wybranym punkcie ramy ze względu na przesunięcie jej określonego węzła:

$$(3.93) \quad P^a \delta w = \sum_{i=1}^m \left\{ [T_{i1}^a w'_{2i}(0) + T_{i1}^a w'_{2i}(0) - M_{gi1}^a w''_{2i}(0) - N_{i1}^a w'_{1i}(0) - \right. \\ \left. - q_{Ti}(0) w_{2i}^a(0) - q_{Ni}(0) w_{1i}^a(0)] \cos \alpha_i - \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} (N_{i1}^a w_{y1} - N_{ik}^a w_{yk} + \right. \\ \left. + N_{i1}^a w_{y1} - N_{ik}^a w_{yk} + T_{i1}^a w_{x1} - T_{ik}^a w_{xk} + T_{i1}^a w_{x1} - T_{ik}^a w_{xk}) - \right. \\ \left. - \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{l_i} (N_{i1}^a w_{x1} - N_{ik}^a w_{xk} + N_{i1}^a w_{x1} - N_{ik}^a w_{xk} + \right. \\ \left. + T_{ik}^a w_{yk} - T_{i1}^a w_{y1} + T_{ik}^a w_{yk} - T_{i1}^a w_{y1}) \right\} \delta s + \\ + \sum_{i=1}^m \left(\int_0^{l_i} \delta q_{Ti} w_{2i}^a dx_i + \int_0^{l_i} \delta q_{Ni} w_{1i}^a dx_i \right),$$

gdzie oznaczenia odpowiadają przyjętym we wzorze (3.84).

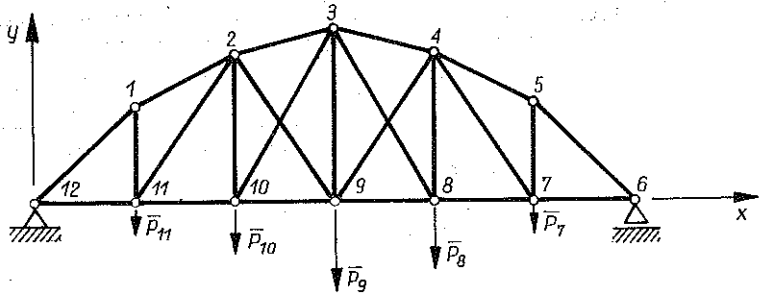
4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Dla kratownicy mostowej przedstawionej na rys. 11 przeprowadzimy analizę wrażliwości składowych przemieszczeń wzdłuż osi y , węzłów 7, 8, 9, 10, 11 ($w_{y7}, w_{y8}, w_{y9}, w_{y10}, w_{y11}$) ze względu na przesunięcia węzłów 1, 2, 3, 4, 5. Do obliczeń przyjęto, iż sztywności wszystkich prętów EA są takie same i będą równe $EA = 6 \cdot 10^8$ [N], współrzędne zaś węzłów od 1 do 11 w układzie współrzędnych o początku w węźle 12 kolejno wynoszą 1 (2; 2), 2 (4; 3), 3 (6; 3.5), 4 (8; 3), 5 (10; 2), 6 (12; 0), 7 (10; 0), 8 (8; 0), 9 (6; 0), 10 (4; 0), 11 (2; 0) i są wyrażone w metrach. Kratownicę obciążono siłami w węzłach 7, 8, 9, 10, 11 równymi co do wartości bezwzględnej

$$P_7 = 2 \cdot 10^4 \text{ [N]}, \quad P_8 = 4 \cdot 10^4 \text{ [N]}, \quad P_9 = 5 \cdot 10^4 \text{ [N]},$$

$$P_{10} = 3 \cdot 10^4 \text{ [N]}, \quad P_{11} = 10^4 \text{ [N]}.$$

Zadanie nasze dotyczy kratownicy symetrycznej, niesymetrycznie obciążonej, dwukrotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalnej. Dla rozwiązania



Rys. 11

problemu zastosowano program ułożony przez autora w języku FORTRAN-1900 przy użyciu komputera Odra-1305. Wymieniony program zawiera: a) rozwiązanie kratownicy podstawowej i kratownic sprzężonych za pomocą MES [9] b) wyliczenie współczynników wrażliwości ze wzoru (3.93). Korzystając z (3.56) rozwiązanie powyższego zagadnienia analizy wrażliwości, możemy przedstawić w formie macierzowej jak następuje:

$$\begin{bmatrix} \delta w_{y7} \\ \delta w_{y8} \\ \delta w_{y9} \\ \delta w_{y10} \\ \delta w_{y11} \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0,906 & -0,586 & -0,135 & 0,051 & 8,011 \\ -1,811 & -1,123 & 0,096 & 2,739 & 4,326 \\ -2,717 & -1,845 & -0,021 & 1,961 & 3,244 \\ -3,622 & -2,685 & -0,074 & 1,180 & 2,163 \\ -6,807 & -0,057 & 0,124 & 0,619 & 1,081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{(1)} \delta p_1 \\ c_1^{(2)} \delta p_2 \\ c_1^{(3)} \delta p_3 \\ c_1^{(4)} \delta p_4 \\ c_1^{(5)} \delta p_5 \end{bmatrix} + \\ + 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,542 & 1,398 & -0,384 & 1,162 & 8,771 \\ 1,084 & 2,501 & 0,442 & 6,109 & 2,851 \\ 1,627 & 4,707 & 0,508 & 5,046 & 2,138 \\ 2,169 & 5,787 & 0,550 & 2,695 & 1,426 \\ 7,268 & 1,465 & -0,332 & 1,502 & 0,713 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^{(1)} \delta p_1 \\ c_2^{(2)} \delta p_2 \\ c_2^{(3)} \delta p_3 \\ c_2^{(4)} \delta p_4 \\ c_2^{(5)} \delta p_5 \end{bmatrix}$$

gdzie δp_i oznacza długość wektora wariacyjnego przesunięcia i -tego węzła, a $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ są jego cosinusami kierunkowymi w układzie współrzędnych x , y .

W celu zbadania dokładności i poprawności obliczeń dokonano porównania zmian przemieszczeń pionowych węzłów 7, 8, 9, 10, 11 wyznaczonych raz przy użyciu współczynników wrażliwości, a drugi raz przez wyliczenie różnic skończonych. Rachunki takie przeprowadzono dla trzech różnych przesunięć węzła 2, a wyniki umieszczono w poniższych tablicach.

1. Przesunięcie węzła 2 w położenie o współrzędnych (4; 3,01)

	$\delta w_{yi} \cdot 10^6$	$(w_{yi}^{(2)} - w_{yi}^{(1)}) \cdot 10^6$	$\frac{\delta w_{yi}}{w_{yi}^{(2)} - w_{yi}^{(1)}} \cdot 100\%$
w_{y7}	1,398	1,378	101,5
w_{y8}	2,501	2,463	101,5
w_{y9}	4,707	4,646	101,3
w_{y10}	5,787	5,717	101,2
w_{y11}	1,465	1,417	103,4

2. Przesunięcie węzła 2 w położenie o współrzędnych (4, 02; 3)

	$\delta w_{yi} \cdot 10^6$	$(w_{yi}^{(2)} - w_{yi}^{(1)}) \cdot 10^6$	$\frac{\delta w_{yi}}{w_{yi}^{(2)} - w_{yi}^{(1)}} \cdot 100\%$
w_{y7}	-1,172	-1,182	99,2
w_{y8}	-2,246	-2,264	99,2
w_{y9}	-3,690	-3,722	99,1
w_{y10}	-5,372	-5,409	99,3
w_{y11}	-0,114	-0,127	89,8

3. Przesunięcie węzła 2 w położenie o współrzędnych (4,02; 3,01)

	$\delta w_{yi} \cdot 10^6$	$(w_{yi}^{(2)} - w_{yi}^{(1)}) \cdot 10^6$	$\frac{\delta w_{yi}}{w_{yi}^{(2)} - w_{yi}^{(1)}} \cdot 100\%$
w_{y7}	0,226	0,223	101,3
w_{y8}	0,255	0,249	102,4
w_{y9}	1,017	1,013	100,4
w_{y10}	0,415	0,404	102,7
w_{y11}	1,351	1,354	99,8

Analiza powyższych wyników pozwala stwierdzić, iż dla stosunkowo niewielkich przesunięć węzłów zmiany przemieszczeń wyznaczone na podstawie współczynników macierzy wrażliwości oraz na podstawie różnic skończonych różnią się najwyżej w granicach kilku procent (z wyjątkiem jednego przypadku, gdzie różnią się o około 10%; lecz zauważmy, iż odpowiedni współczynnik wrażliwości jest o rząd mniejszy od pozostałych). Świadczy to o tym, że zagadnienie nasze nie jest silnie nieliniowe i przedstawioną metodę można stosować w gradientowych metodach optymalizacyjnych.

5. UWAGI KOŃCOWE

1. Przedstawione rozważania dla ram i kratownic płaskich można łatwo rozszerzyć na ustroje trójwymiarowe.

2. Rozwiązania metodą układów sprzężonych są dokładne.

3. Rozwiązania poszczególnych problemów przedstawiono w formie zamkniętych wzorów, pozwalających na wyznaczenie poszukiwanych współczynników macierzy wrażliwości na podstawie rozwiązania dwu konstrukcji: podstawowej i sprzężonej.

4. Analizę wrażliwości metodą układów sprzężonych można realizować jednocześnie wraz z rozwiązywaniem konstrukcji dowolnym sposobem przy stosunkowo niewielkim dodatkowym czasie pracy maszyny cyfrowej. Wydaje się, jako szczególnie korzystne, zadanie powyższe rozwiązywać za pomocą

metody elementów skończonych ze względu na identyczny charakter macierzy sztywności konstrukcji podstawowej i sprzężonej.

5. Metodę układów sprzężonych można stosować w metodach gradientowych optymalnego projektowania, gdzie poszukiwane gradienty odpowiadają będą poszczególnym wyrazom odpowiedniej macierzy wrażliwości.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. BRANDT, J. KOSMOWSKI, Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu kratownic na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty*, Rozp. Inżyn., 5, 2, 157–206, 1957.
2. J. S. ARORA, E. J. HAUG, *Methods of design sensitivity analysis in structural optimization*, AIAA J., 17, 970–973, 1979.
3. K. DEMS, Z. MRÓZ, *Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis. I. Variation of material parameters within fixed domain*, Intern. J. Solids and Struct., 19, 677–692, 1983.
4. K. DEMS, Z. MRÓZ, *Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis. II. Structure shape variation*, Intern. J. Solids and Struct., 20, 527–552, 1984.
5. K. DEMS, *Wieloparametrowa optymalizacja kształtu konstrukcji*, Zesz. Nauk. Politech. Łódzkiej, 29, 1980.
6. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
7. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1972.
8. C. C. HSIEH, J. S. ARORA, *Structural design sensitivity analysis with general boundary conditions: static problem*, Intern. J. Numerical Method in Engng. 20, 1661–1670, 1984.
9. A. JAWORSKI, *Metoda elementów skończonych w wytrzymałości konstrukcji*, WPW, Warszawa 1981.
10. K. I. MAJID, *Optymalne projektowanie konstrukcji*, PWN, Warszawa 1981.
11. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1976.
12. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Aktualny stan wiedzy o kształtowaniu wytrzymałościowym konstrukcji*, Rozpr. Inżyn., 10, 2, 307–332, 1962.

РЕЗЮМЕ

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ И БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе представлен метод исследования чувствительности линейно-упругих стержневых и балочных конструкций из-за изменений геометрических параметров. Сводится он к образованию вариационных зависимостей для исследуемой конструкции и ответственной сопряженной конструкции на основе энергетических принципов. Показан способ проведения анализа чувствительности из-за изменений геометрических параметров так о характере размерных переменных, как и конфигурационных переменных, позволяющих произвольно модифицировать форму конструкции.

SUMMARY

COMPLIANCE ANALYSIS OF ELASTIC ROD AND BEAM STRUCTURES

Sensitivity of linearly elastic rod and beam structures to the variations of geometric parameters is analysed in the paper. The problem is reduced to constructing the variational relations for the structure under consideration and the corresponding coupled structure on the basis of energy principles. Compliance analysis is performed in the case of variation of both the dimensions and configuration of the structure thus allowing for an arbitrary modification of the design.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA W KIELCACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 maja 1985 r.