

OSOBLIWI ELEMENT POWIERZCHNIOWY W ANALIZIE PŁYT I STEPLI NA PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ(*)

GRZEGORZ CYROK (ZIELONA GÓRA) i ROMUALD ŚWITKA (POZNAŃ)

Praca dotyczy problemu płyt i stempli wciskanych w półprzestrzeń sprężystą. Obliczenia komputerowe są realizowane przy zastosowaniu metody elementów skończonych do płyty i metody elementów brzegowych do półprzestrzeni sprężystej. Wykazano, że aproksymacja liniowa w elementach brzegowych przylegających do krawędzi płyty lub stempla prowadzi do znacznego zniekształcenia wyników. Prawidłowe wyniki numeryczne, pokrywające się prawie dokładnie z analitycznymi, można otrzymać stosując elementy brzegowe z osobliwością na obwodzie płyty lub stempla. Koncepcja elementu osobliwego jest w pracy przedmiotem licznych analiz. Tezę autorów potwierdzają przykłady obliczeń.

1. WSTĘP

W numerycznych rozwiązaniach dla płyt na podłożu sprężystym typu półprzestrzeni sprężystej bardzo efektywne okazuje się połączenie metody elementów skończonych dla płyty z metodą elementów brzegowych dla półprzestrzeni sprężystej. Takie ujęcie było przedstawiane m.in. w pracy [1] dotyczącej płyt na półprzestrzeni sprężystej przy założeniu więzów dwustronnych oraz w pracy [2] zawierającej analizę stempla wciskanego w półprzestrzeń sprężystą z uwzględnieniem jednostronności więzów na styku stempla z podłożem. W obu pracach przyjęto liniową aproksymację odporu podłoża w obszarze pojedynczego elementu.

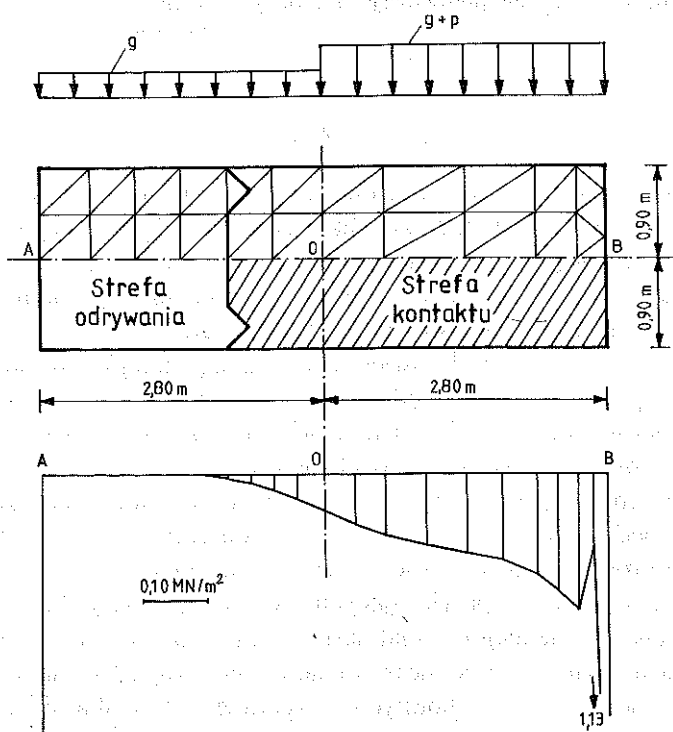
Stosując metodę elementów brzegowych w zadaniach kontaktowych, w których jedno z ciał (np. płyta lub stempel) wciskane jest w drugie ciało (np. półprzestrzeń sprężystą) „ostrą” krawędzią, natrafia się na pewne trudności w obszarach przylegających do brzegu płyty lub stempla. Jeśli krawędź wciskana jednego z ciał jest „ostra”, to znaczy nie wyokrąglona, to w rozwiązaniu w przemieszczeniach dla drugiego ciała pojawia się nieciągłość pierwszych pochodnych i zgodnie z wynikami matematycznej

(*) Praca została wykonana w CPBP 02.01.

teorii sprężystości naprężenia w podłożu przy zbliżaniu się do krawędzi wciskanej płyty lub stempla rosą nieograniczenie.

Przy zastosowaniu wymienionych wyżej metod w ujęciu standardowym otrzymuje się rozwiązania przybliżone, które w pobliżu krawędzi wciskanych dają silnie zniekształcony obraz odporu podłoża. Zniekształcenia te polegają po pierwsze na otrzymywaniu skończonych wartości odporu podłoża wzdłuż krawędzi wciskanych i po drugie, na pojawianiu się znacznego obniżenia rzędnych odporu w pobliżu krawędzi. Zniekształcenie pierwsze nie ma istotnego znaczenia praktycznego, bowiem osobliwość funkcji opisującej odpór podłoża stanowi fikcję matematyczną, którą w zadaniu inżynierskim należy skorygować. Przejście od tej fikcji do rzeczywistości fizycznej może np. polegać na „obciążeniu” rzędnych wzdłuż krawędzi do poziomu naprężeń odpowiadających uplastycznieniu podłoża. Drugi rodzaj zniekształcenia zmienia natomiast tak znacznie przebieg funkcji opisującej odpór podłoża, że jest trudny do zaakceptowania zarówno ze względów praktycznych jak i poznawczych.

Na rys. 1 pokazano wyniki obliczeń dla wydłużonej płyty prostokątnej. Płyta obciążona jest nierównomiernie, w wyniku czego pojawia się strefa



Rys. 1

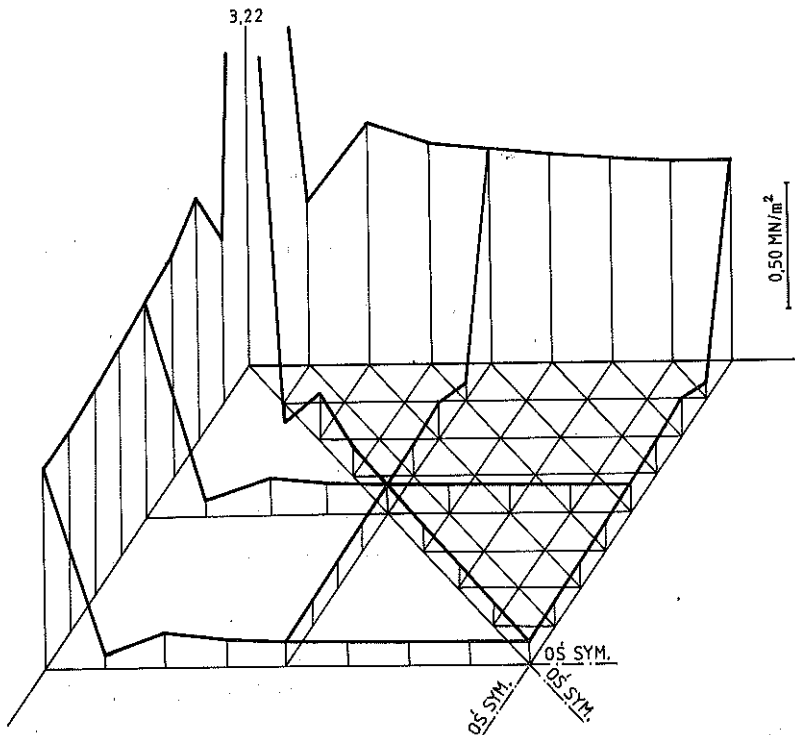
odrywania. Poniżej pokazany jest wykres odporu podłoża wzdłuż odcinka $A-O-B$, na którym przedostatnia rzędna jest wyraźnie obniżona. Jest to wynik zaburzeń numerycznych związanych z przyjętą aproksymacją.

Płyta została obliczona dla następujących danych: $q = 0,025 \text{ MN/m}^2$, $p = 60q$, wysokość przekroju płyty $h = 0,1 \text{ m}$, charakterystyka sprężysta płyty $E = 2,3 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 1/6$, charakterystyka sprężysta podłoża $E_0 = 20 \text{ MPa}$, $\nu_0 = 0,3$. W części górnej rzutu płyty pokazano podział na trójkątne elementy skończone. Każdy element skończony płyty dzieli się na cztery trójkątne elementy brzegowe podłoża.

W pobliżu naroży płyty zaburzenia te kumulują się zniekształcając przebieg odporu tak znacznie, że pojawiają się nawet niewielkie obszary odporu ujemnego. Ilustracją tego zjawiska może być wykres odporu podłoża pod stemplem o podstawie kwadratowej pokazany na rys. 2.

Stempel był obliczony dla następujących danych: $a = 2,00 \text{ m}$ (długość boku), $E_0 = 15 \text{ MPa}$, $\nu_0 = 0,3$, siła wciskająca $P = 0,80 \text{ MN}$.

Przedstawione wyniki w otoczeniu krawędzi i naroży znacznie odbiegają od prawidłowych. Uzasadnione jest więc poszukiwanie takiej modyfikacji metody elementów brzegowych, która by likwidowała omówione zniekształcenia.



Rys. 2

W celu lepszego przybliżenia wyniku numerycznego do rozwiązania analitycznego wprowadza się do aproksymacji osobliwość: odpór podłoża w elementach przylegających do brzegu płyty aproksymuje się iloczynem dwóch funkcji, z których pierwsza jest regularna, jak w pozostałych elementach brzegowych, natomiast druga zawiera wzdłuż brzegu płyty odpowiednio dobraną osobliwość.

Pewne próby we wskazanym wyżej kierunku były już czynione [3, 4, 5]. AKIN w pracy [3] wprowadził element skończony zawierający osobliwości punktowe. BROTHERS, SINCLAIR i SEGEDIN [4] rozpatrywali problem stempla o podstawie prostokątnej. Odpór podłoża w całym obszarze kontaktu przyjęto, wykorzystując wyniki RWACZEWA [6], w postaci

$$(1.1) \quad q(x, y) = \bar{q}(x, y) [(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)]^{-1/2}.$$

Składnik regularny rozwiązania $\bar{q}(x, y)$ aproksymowany był funkcją schodkową. Podobna metoda stosowana była w pracy [5] przez MASTROJANNISA, KEERA i MURE. Wymaga ona budowania osobliwego składnika rozwiązania w każdym konkretnym przypadku kształtu płyty lub stempla i nie nadaje się tym samym do stosowania w uniwersalnym programie komputerowym. Cytowane prace nie zawierają bardziej szczegółowych analiz i przykładów.

2. PRZYKŁAD TESTOWY

Dokładną analizę rozważanego problemu można przeprowadzić na prostym przykładzie, dla którego znane jest ściśle rozwiązanie analityczne. W tym celu bierze się pod uwagę znane zadanie Sadowsky'ego dotyczące wciskania stempla płaskiego w półprzestrzeń sprężystą, w warunkach płaskiego stanu odkształcenia.

Będziemy badać, w jakim stopniu metoda elementów brzegowych może aproksymować wynik analityczny

$$(2.1) \quad q(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}},$$

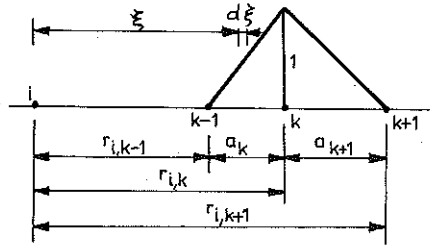
w którym występuje osobliwość typu $r^{-1/2}$. We wzorze (2.1) q jest odporem podłoża, P — siłą obciążającą osiowo stempel o podstawie płaskiej, $2c$ — szerokością podstawy stempla. Zmienna x jest mierzona od osi symetrii stempla.

Trzymając się zasad typowych dla metody elementów brzegowych, zastosujemy jednakże bardziej „analityczny” zapis wskaźnikowy stosowany w klasycznej metodzie sił.

W analizie posłużymy się funkcją Greena

$$(2.2) \quad w^*(x, \xi) = -\frac{1-\nu_0}{2\pi G_0} \ln \left| \frac{x-\xi}{L} \right|.$$

We wzorze (2.2) G_0 i ν_0 są odpowiednio modułem ścinania i współczynnikiem Poissona dla półprzestrzeni sprężystej, x — odcięta punktu bieżącego, ξ — odcięta punktu przyłożenia siły jednostkowej, L — dowolną wielkością mającą wymiar długości.



Rys. 3

Stosując element brzegowy z liniową funkcją kształtu, otrzymamy dla stanu jednostkowego realizowanego w węźle k (rys. 3) następujący wzór na elementy macierzy podatności podłoża

$$(2.3) \quad \delta_{ik} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \left[\frac{3}{2} (a_k + a_{k+1}) - \frac{r_{i(k-1)}^2}{a_k} \ln \left| \frac{r_{i(k-1)}}{L} \right| + \right. \\ \left. + r_{ik}^2 \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) \ln \left| \frac{r_{ik}}{L} \right| - \frac{r_{i(k+1)}^2}{a_{k+1}} \ln \left| \frac{r_{i(k+1)}}{L} \right| \right],$$

w którym r_{ik} jest odległością od węzła i do węzła k , a_k — długością elementu $(k-1, k)$. We wzorze (2.3) węzeł k nie może w ogólności należeć do elementu skrajnego $(n-1, n)$.

Dla $k = i$ wzór (2.3) przechodzi w

$$(2.4) \quad \delta_{ii} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \left[\frac{3}{2} (a_k + a_{k+1}) - a_k \ln \left| \frac{a_k}{L} \right| - a_{k+1} \ln \left| \frac{a_{k+1}}{L} \right| \right].$$

Dla elementów skrajnych przyjmujemy najpierw liniową funkcję kształtu (element nieosobliwy — NOS), a następnie element z funkcją kształtu zawierającą w węźle skrajnym (n) osobliwość (element osobliwy — OSO).

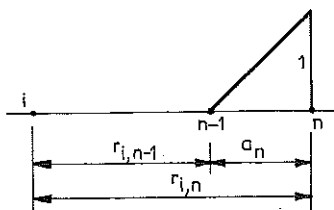
Element nieosobliwy (NOS)

Dla $k = n-1$ zachowuje ważność wzór (2.3), natomiast dla $k = n$ (stan jednostkowy w węźle skrajnym — rys. 4) otrzymuje się

$$(2.5) \quad \delta_{in} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \left[\frac{3}{2} a_n - r_{in} - \frac{r_{i(n-1)}^2}{a_n} \ln \left| \frac{r_{i(n-1)}}{L} \right| + \right. \\ \left. + \frac{r_{in}}{a_n} (r_{in} - 2a_n) \ln \left| \frac{r_{in}}{L} \right| \right],$$

oraz

$$(2.6) \quad \delta_{nn} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} a_n \left(\frac{3}{2} - \ln \left| \frac{a_n}{L} \right| \right).$$



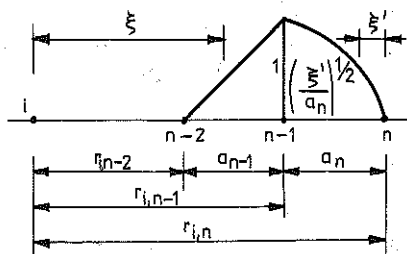
Rys. 4

Element osobliwy (OSO)

Liniową funkcję kształtu w elemencie skrajnym $(n-1, n)$ mnożymy przez funkcję z osobliwością w węźle n : $\left(\frac{r_{in} - \xi}{a_n} \right)^{-1/2}$.

W ten sposób funkcje aproksymujące mają kształt pokazany na rysunkach 5 i 6. Na rys. 5 pokazana jest realizacja stanu jednostkowego w węźle $(n-1)$. Sytuację pokazaną na rys. 6 można tylko umownie nazwać realizacją stanu „jednostkowego” w węźle n . Odpór podłoża w elemencie skrajnym osobliwym opisuje funkcja

$$(2.7) \quad q(\xi') = q_{n-1} \sqrt{\frac{\xi'}{a_n}} + q_n \left(\sqrt{\frac{a_n}{\xi'}} - \sqrt{\frac{\xi'}{a_n}} \right),$$



Rys. 5

gdzie $\xi' = r_{in} - \xi$. Należy podkreślić, że q_n nie jest tu rzędną odporu podłoża w węzle n (rzędna ta dąży do nieskończoności), lecz jest parametrem węzłowym pozbawionym jawnej interpretacji. Parametr q_n steruje aproksymacją w elemencie skrajnym.

Dla odpowiednich elementów macierzy podatności otrzymuje się wzory

$$(2.8) \quad \delta_{i(n-1)} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \left[\frac{5}{3} r_{i(n-1)} + \frac{3}{2} a_{n-1} + \frac{32}{9} a_n - \frac{r_{i(n-2)}^2}{a_{n-1}} \ln \left| \frac{r_{i(n-2)}}{L} \right| + \right. \\ \left. + \left(\frac{r_{i(n-1)}^2}{a_{n-1}} - 2r_{i(n-1)} - \frac{4}{3} a_n \right) \ln \left| \frac{r_{i(n-1)}}{L} \right| + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} r_{in} \sqrt{\frac{r_{in}}{a_n}} \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{a_n}{r_{in}} - 1}}{\sqrt{\frac{a_n}{r_{in}} + 1}} \right] \right], \quad i \neq (n-1), n;$$

$$(2.9) \quad \delta_{(n-1)(n-1)} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \left(\frac{3}{2} a_{n-1} + \frac{32}{9} a_n - a_{n-1} \ln \left| \frac{a_{n-1}}{L} \right| - \frac{4}{3} a_n \ln \left| \frac{4a_n}{L} \right| \right),$$

$$(2.10) \quad \delta_{n(n-1)} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \left[\frac{1}{18} (34a_n + 27a_{n-1}) - \frac{(a_{n-1} + a_n)^2}{a_{n-1}} \ln \left| \frac{a_{n-1} + a_n}{L} \right| + \right. \\ \left. + \frac{a_n}{3a_{n-1}} (2a_{n-1} + 3a_n) \ln \left| \frac{a_n}{L} \right| \right],$$

Dla $i = n$ wzór (2.11) przechodzi w:

$$(2.11) \quad \delta_{in} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \cdot \frac{4}{3} a_n \left[2 \left(\frac{8}{3} - \frac{r_{in}}{a_n} \right) - 2 \ln \left| \frac{r_{i(n-1)}}{L} \right| + \right. \\ \left. + \left(3 - \frac{r_{in}}{a_n} \right) \sqrt{\frac{r_{in}}{a_n}} \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{a_n}{r_{in}} - 1}}{\sqrt{\frac{a_n}{r_{in}} + 1}} \right] \right], \quad i \neq (n-1);$$

$$(2.12) \quad \delta_{(n-1)n} = \frac{1-\nu_0}{4\pi G_0} \cdot \frac{8}{3} a_n \left(\frac{5}{3} - \ln \left| \frac{4a_n}{L} \right| \right).$$

Dla $i = n$ wzór (2.11) przechodzi w:

$$(2.13) \quad \delta_{nn} = \frac{1-v_0}{4\pi G_0} \cdot \frac{8}{3} a_n \left(\frac{8}{3} - \ln \left| \frac{a_n}{L} \right| \right).$$

Przyjmując regularny podział na elementy $a_n = a = \text{const}$, $r_{ik} = |i-k|a$, $L/a = N$, otrzymuje się:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \delta_{ik} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \left[3 - (J-1)^2 \ln \left| \frac{J-1}{N} \right| + 2J^2 \ln \left| \frac{J}{N} \right| - (J+1)^2 \ln \left| \frac{J+1}{N} \right| \right], \\ \delta_{ii} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \left(3 - 2 \ln \left| \frac{1}{N} \right| \right); \end{aligned}$$

NOS:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \delta_{in} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \left[\frac{3}{2} - J - (J-1)^2 \ln \left| \frac{J-1}{N} \right| + J(J-2) \ln \left| \frac{J}{N} \right| \right], \\ \delta_{nn} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \left(\frac{3}{2} - \ln \left| \frac{1}{N} \right| \right); \end{aligned}$$

OSO:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \delta_{i(n-1)} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \left[\frac{91}{18} + \frac{5}{3} J - (J-1)^2 \ln \left| \frac{J-1}{N} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left(J^2 - 2J - \frac{4}{3} \right) \ln \left| \frac{J}{N} \right| + \frac{4}{3} (J+1)^{3/2} \ln \left| \frac{\sqrt{J+1}-1}{\sqrt{J+1}+1} \right| \right], \quad i \neq (n-1)n; \\ \delta_{(n-1)(n-1)} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \left(\frac{91}{18} - \ln \left| \frac{1}{N} \right| - \frac{4}{3} \ln \left| \frac{4}{N} \right| \right), \\ \delta_{n(n-1)} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \left(\frac{61}{18} + \frac{5}{3} \ln \left| \frac{1}{N} \right| - 4 \ln \left| \frac{2}{N} \right| \right), \\ \delta_{in} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \cdot \frac{8}{3} \left[\frac{8}{3} - J - \ln \left| \frac{J-1}{N} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (3-J) \sqrt{J} \ln \left| \frac{\sqrt{J-1}}{\sqrt{J+1}} \right| \right], \quad i \neq (n-1), \\ \delta_{(n-1)n} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \cdot \frac{8}{3} \left(\frac{5}{3} - \ln \left| \frac{4}{N} \right| \right), \\ \delta_{nn} &= \frac{1-v_0}{4\pi G_0} a \cdot \frac{8}{3} \left(\frac{8}{3} - \ln \left| \frac{1}{N} \right| \right). \end{aligned}$$

We wzorach (2.14)–(2.16) jest $J = |k-i|$, przy czym w (2.16)₁ jest $J = |n-1-i|$.

Warunki kontaktu w węzłach dla stempla płaskiego, z wykorzystaniem symetrii zadania, prowadzą do układu równań

$$(2.17) \quad \delta_{i0} q_0 + \sum_{k=1}^n (\delta_{i(-k)} + \delta_{ik}) q_k = w_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

w którym q_k są rzędnymi odporu podłoża w węzłach i w_0 jest przemieszczeniem stempla. Układ równań (2.17) wraz z warunkiem równowagi

$$2 \int_0^c q(x) dx = P,$$

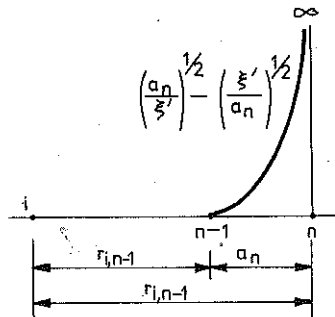
kotóry prowadzi do równania

$$(2.18) \quad q_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} q_i + q_n = \frac{P}{a},$$

dla NOS, lub

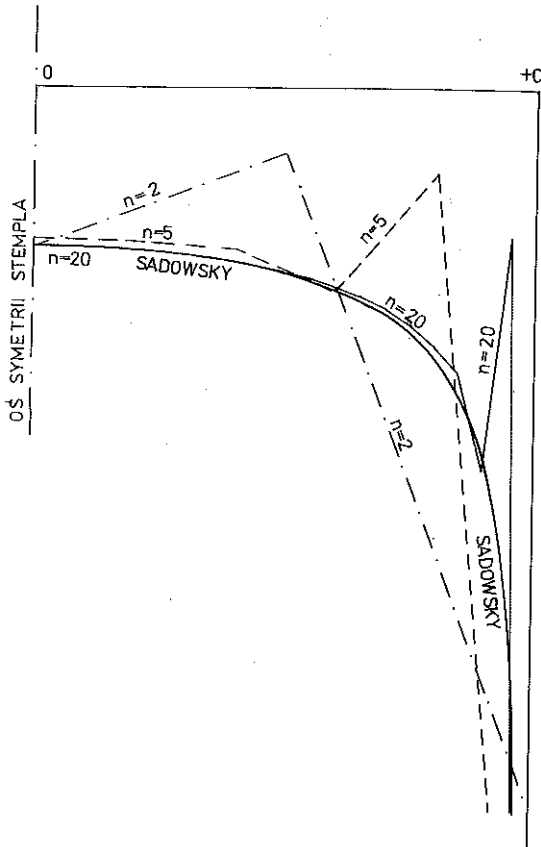
$$(2.19) \quad q_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-2} q_i + \frac{7}{3} q_{n-1} + \frac{8}{3} q_n = \frac{P}{a},$$

dla OSO, w sposób jednoznaczny określają przemieszczenie stempla w_0 i rzędne odporu podłoża w węzłach q_i .



Rys. 6

Podane powyżej równania i wzory pozwalają na przeprowadzenie szczegółowej analizy porównawczej elementów NOS i OSO. W tym celu wykonano obliczenia dla $n = 2, 3, \dots, 40$. Wyniki otrzymane przy zastosowaniu elementu NOS zestawiono dla wybranych n ($n = 2, 5, 20$) z wynikiem analitycznym Sadowsky'ego na rys. 7. Widoczne jest charakterystyczne zaburzenie w pobliżu krawędzi utrzymujące się niezależnie od wielkości n . Zagęszczanie podziału na elementy (NOS) nie prowadzi więc do poprawy jakości wyniku w strefie przykrawędziowej. Zastosowanie elementu OSO zmienia sytuację w sposób radykalny. Już dla $n = 2$ (podział połowy szerokości stempla na



Rys. 7

dwa elementy) otrzymuje się wyniki, które na wykresie analogicznym do wykresu na rys. 7 są nieodróżnialne od wyniku Sadowsky'ego. Bardziej obiektywne oceny są możliwe na podstawie analizy błędów aproksymacji.

Niech rozwiązanie numeryczne będzie reprezentowane przez zbiór $\{w_0^N, q_0^N, q_1^N, \dots, q_n^N\}$, natomiast rozwiązanie analityczne przez zbiór $\{w_0^A, q_0^A, q_1^A, \dots, q_n^A\}$, przy czym

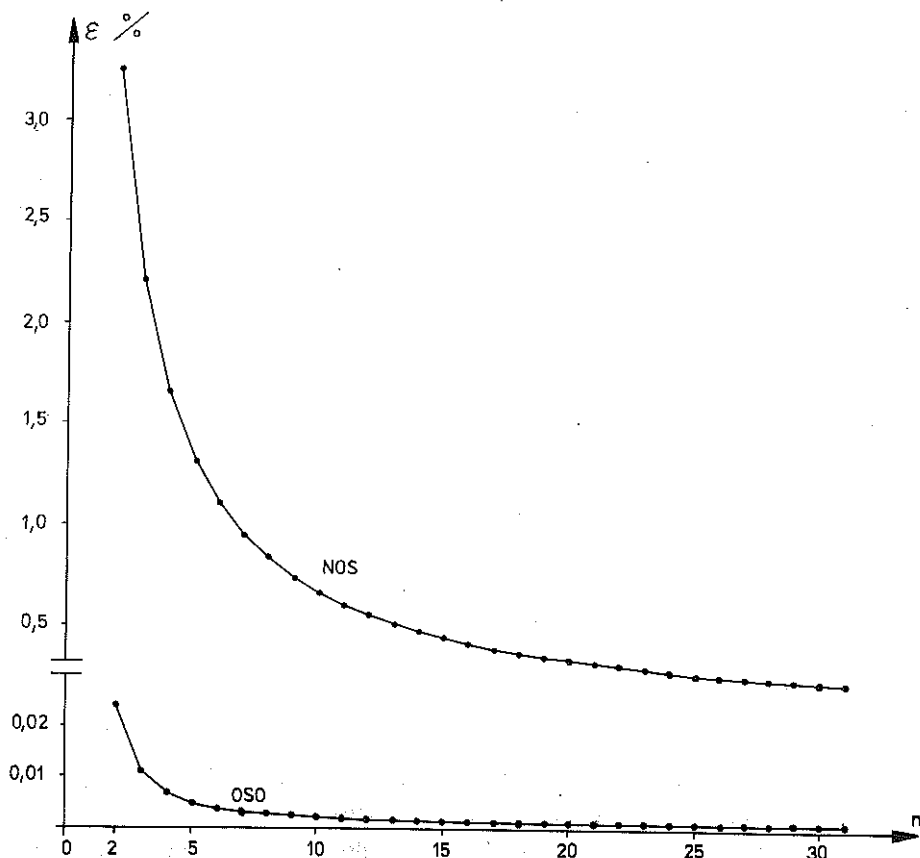
$$(2.20) \quad w_0^A = \frac{1-\nu_0}{2\pi G_0} P \ln \left| \frac{2L}{c} \right|, \quad q_i^A = \frac{P}{\pi c \sqrt{1-(i/n)^2}},$$

gdzie $2c$ — szerokość stępła, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Zdefiniujemy błąd procentowy przemieszczenia

$$(2.21) \quad \varepsilon = \left| \frac{w_0^A - w_0^N}{w_0^A} \right| \cdot 100\%.$$

Na rys. 8 przedstawiono wykresy błędu ε jako funkcji gęstości podziału



Rys. 8

na elementy n . Zastosowanie elementu OSO zmniejsza błąd ε ok. sto-krotnie.

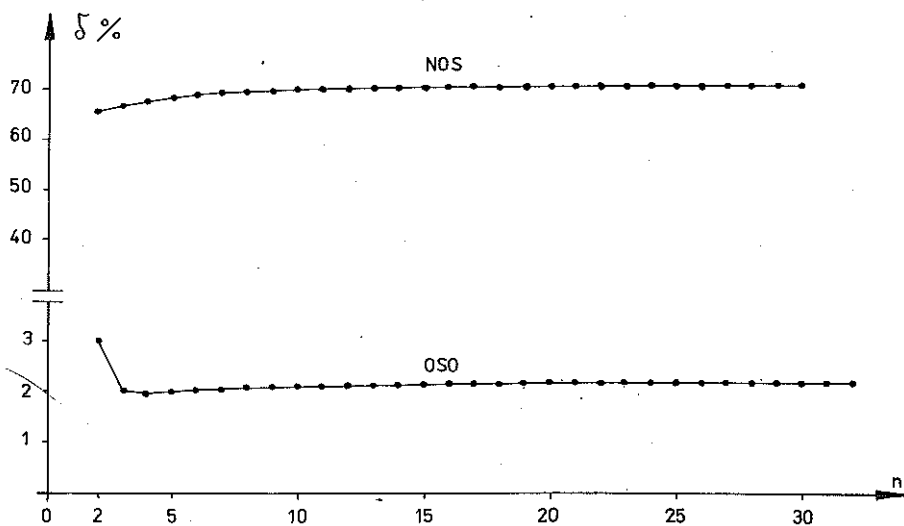
Przechodząc do błędów aproksymacji odporu, zdefiniujemy najpierw błąd

$$(2.22) \quad \delta = \sup_{i \in \{0, n-1\}} \left\{ \left| \frac{q_i^A - q_i^N}{q_i^A} \right| \cdot 100\% \right\},$$

będący miarą jednostajnej zbieżności wyniku numerycznego do analitycznego. Okazuje się, że jednostajna zbieżność nie istnieje w obu przypadkach ($\lim_{n \rightarrow \infty} \delta \neq 0$) i, co charakterystyczne, zwiększanie n nieznacznie zwiększa błąd.

Krzywe $\delta = \delta(n)$ pokazano na rys. 9. Dla elementu NOS krzywa $\delta = \delta(n)$ jest funkcją monotonicznie rosnącą mającą kres górny na poziomie ok. 71%. Dla elementu OSO krzywa $\delta = \delta(n)$ najpierw maleje, a następnie dla $n > 4$ monotonicznie rośnie z kresem górnym ok. 2,2%.

Drugą ważną miarą błędu aproksymacji odporu jest średnie odchylenie kwadratowe.



Rys. 9

$$(2.23) \quad \Delta' = \frac{1}{c} \int_0^{\xi} [q^I(x) - q^V(x)]^2 dx,$$

charakteryzujące zbieżność przeciętną. Uwzględniając w (2.33) przyjęte aproksymacje w granicach poszczególnych elementów, otrzymuje się dla elementu skrajnego całki rozbieżne. Wobec powyższego analizuje się dalej średnie odchylenie kwadratowe zdefiniowane na zbiorze dyskretnym:

$$(2.24) \quad \Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (q_i^A - q_i^N)^2.$$

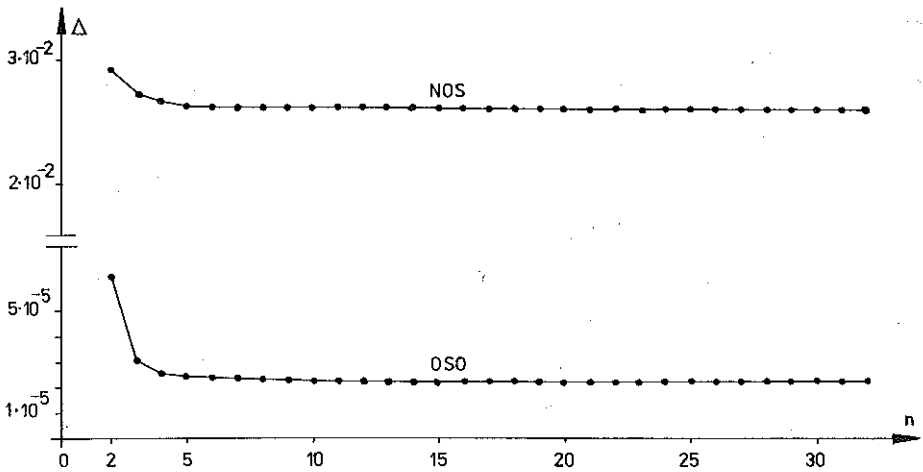
Na rys. 10 pokazane są krzywe $\Delta = \Delta(n)$. Są to krzywe monotonicznie malejące, lecz mające kres dolny większy od zera. Zastosowanie elementu OSO zmniejsza błąd Δ ok. tysiąckrotnie.

Przeprowadzone analizy numeryczne można zamknąć następującymi wnioskami:

1) Zastosowanie elementu OSO likwiduje całkowicie zaburzenia numeryczne wynikające z aproksymacji liniowej dla wszystkich elementów. Wynik jest praktycznie nieodróżnialny od analitycznego wyniku ścisłego.

2) Błąd aproksymacji, chociaż przy zastosowaniu OSO jest bardzo mały, to jednak nie może być dowolnie zmniejszany. Nie istnieje bowiem zbieżność ani jednostajna, ani przeciętna z kwadratem.

3) Zwiększanie podziału na elementy nie zwiększa w zasadzie dokładności, bowiem błędy δ i Δ pozostają w przybliżeniu na stałym poziomie niezależnie od liczby podziału n .



Rys. 10

3. PŁYTY I STEMPLE NA PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYTEJ

3.1. Aproksymacja odporu podłoża w elemencie powierzchniowym z osobliwością

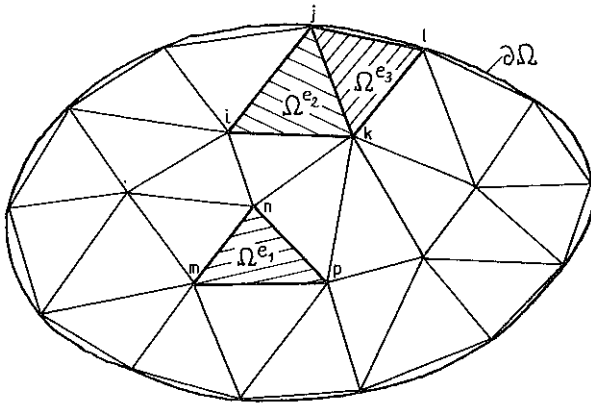
Niech na półprzestrzeni sprężystej spoczywa płyta lub płaski stempel. Obszar Ω stanowiący część płaszczyzny $z = 0$ zajęty przez podstawę płyty lub stempła dzieli się na podobszary Ω^e — trójkątne elementy brzegowe ($e = 1, 2, \dots, E$; E — liczba elementów). Zbiór numerów elementów brzegowych $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, E\}$ dzieli się na podzbiory: \mathcal{E}' — zbiór numerów tych elementów, które nie zawierają węzłów leżących na $\partial\Omega$, \mathcal{E}'' — zbiór numerów tych elementów, które zawierają węzły leżące na $\partial\Omega$; $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$, $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' = \emptyset$. Węzły nie leżące na linii $\partial\Omega$ numerowane są liczbami $1, 2, \dots, M$; pozostałe węzły leżące na $\partial\Omega$ numerowane są liczbami $M+1, M+2, \dots, W$; W — liczba węzłów. Wprowadza się oznaczenia: $\mathcal{W}' = \{1, 2, \dots, M\}$, $\mathcal{W}'' = \{M+1, M+2, \dots, W\}$. Symbolem \mathcal{W}'_0 oznaczono pewien podzbiór zbioru \mathcal{W}' ; elementami zbioru \mathcal{W}'_0 są te spośród liczb $s \in \mathcal{W}'$, które są numerami węzłów elementów brzegowych przylegających do linii $\partial\Omega$.

Oddziaływanie podłoża w elementach Ω^e dla $e \in \mathcal{E}'$ (np. Ω^{e_1} na rys. 11) aproksymuje się wzorem [1, 2]

$$(3.1) \quad q(x, y) = L_m(x, y) q_m + L_n(x, y) q_n + L_p(x, y) q_p,$$

$$\{m, n, p\} \subset \mathcal{W}'_0,$$

w którym $L_m(x, y), \dots$ — są liniowymi funkcjami kształtu (współrzędnymi powierzchniowymi elementu względem kolejnych węzłów; $L_m + L_n + L_p = 1$), q_m, \dots — są rzędnymi odporu podłoża w węzłach.



Rys. 11

Jeśli $e \in \mathcal{E}''$, to rozróżnia się dwa przypadki:

1. Jeden z węzłów elementu leży na $\partial\Omega$ (np. element Ω^{e_2} na rys. 11). Wówczas przyjmuje się

$$(3.2) \quad q = (L_i q_i + L_j q_j + L_k q_k) (L_i + L_k)^{-\lambda}, \quad \{i, k\} \subset \mathcal{N}', \quad j \in \mathcal{N}''.$$

2. Dwa węzły elementu leżą na $\partial\Omega$ (np. element Ω^{e_3} na rys. 11). Wówczas przyjmuje się

$$(3.3) \quad q = (L_j q_j + L_k q_k + L_l q_l) L_k^{-\lambda}, \quad k \in \mathcal{N}', \quad \{j, l\} \subset \mathcal{N}''.$$

We wzorach (3.2) i (3.3) q_i i q_k są rzędnymi odporu podłoża w węzłach, natomiast q_j i q_l dla $\lambda > 0$ pełnią rolę parametrów węzłowych sterujących aproksymacją w elemencie. Parametry te dla $\lambda > 0$ nie mają wyraźnego sensu fizycznego i tylko dla $\lambda = 0$ stają się fizycznymi rzędnymi odporu podłoża w węzłach leżących na brzegu $\partial\Omega$. Wzory (3.2) i (3.3) przechodzą wówczas w (3.1). Wykładnik λ określa rząd osobliwości na brzegu płyty lub stępła. Jest to osobliwość typu $1/r^\lambda$, gdzie r jest odległością od brzegu.

Przyjęta aproksymacja zapewnia ciągłość odporu podłoża na granicach elementów w całym obszarze Ω . Pewnym mankamentem jest stały rząd osobliwości wzdłuż brzegu. Wiadomo, że w przypadku stępła kołowego (i ogólniej — wzdłuż brzegu gładkiego) o osobliwości decyduje funkcja $(a^2 - x^2)^{-1/2} = [(a-x)(a+x)]^{-1/2} = r^{-1/2}(a+x)^{-1/2}$, czyli $\lambda = 1/2$. Natomiast np. dla stępła trójkątnego lub prostokątnego osobliwość w narożach ma rząd zależny od kąta zawartego między bokami (RWA CZEW [6, 7]).

W celu usunięcia powyższego mankamentu można wzory (3.2) i (3.3) zmodyfikować, nie naruszając ciągłości aproksymacji w całym obszarze Ω , w sposób następujący:

w przypadku 1:

$$(3.4) \quad q = L_i L_{ik}^{-\mu_i} q_i + L_j L_{ik}^{-\lambda_j} q_j + L_k L_{ik}^{-\mu_k} q_k, \quad L_{ik} = L_i + L_k,$$

w przypadku 2:

$$(3.5) \quad q = L_j L_k^{-\lambda_j} q_j + L_k^{-\mu_k} q_k + L_i L_k^{-\lambda_i} q_l.$$

W ten sposób każdemu węzłowi $r \in \Omega'$ można przyporządkować liczbę λ_r , każdemu węzłowi $s \in \Omega'_0$ — liczbę μ_s . Liczby λ_r określają rząd osobliwości w otoczeniu węzła r i wynikają z badań teoretycznych. Liczby μ_s powinny być tak dobrane, ażeby różnice pomiędzy liczbami λ_r i μ_s , przyporządkowanymi każdemu z elementów brzegowych przylegających do $\partial\Omega$, były możliwie małe. Można np. przyjąć w typowym, dla przypadku 2, wzorze (3.5): $\mu_k = (\lambda_j + \lambda_i)/2$. W ten sposób każda z liczb μ_s , $s \in \Omega'_0$, zostaje określona.

3.2. Macierz podatności podłoża

Podstawowe znaczenie dla algorytmu obliczeń płyt i stępli na półprzestrzeni sprężystej [1, 2] ma macierz podatności podłoża $\mathbf{D} = [\delta_{pq}]_{(W \times W)}$. Macierz ta występuje w związku

$$(3.6) \quad \mathbf{V} = \mathbf{D}\mathbf{Q},$$

w którym $\mathbf{V} = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ jest wektorem przemieszczeń pionowych podłoża w węzłach, $\mathbf{Q} = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_M, q_{M+1}, \dots, q_W)$ — wektor rzędnych odporu podłoża q_r w węzłach $r \in \Omega'$ i parametrów aproksymacji q_s dla węzłów $s \in \Omega''$. Obliczenie elementów macierzy podatności δ_{pq} gdy $q \in \Omega''$ nie stanowi problemu. Wielkości te określa wzór

$$(3.7) \quad \delta_{pq} = \sum_{e \in \mathcal{E}_q} \delta_{pq}^e,$$

w którym \mathcal{E}_q jest zbiorem numerów tych elementów, które zawierają węzeł q , natomiast δ_{pq}^e oblicza się wzorem

$$(3.8) \quad \delta_{pq}^e = \kappa \iint_{\Omega^e} \frac{E_q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x_p - \xi)^2 + (y_p - \eta)^2]^{1/2}},$$

gdzie

$$(3.9) \quad \kappa = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0},$$

E_0 , ν_0 — moduł sprężystości i współczynnik Poissona dla podłoża. W przypadku, gdy całkowanie we wzorze (3.8) odbywa się po obszarze Ω^e przylegającym do linii $\partial\Omega$, wówczas w liczniku funkcji podcałkowej występuje nieliniowa funkcja kształtu określona we wzorze (3.4) lub (3.5) (funkcja przyporządkowana węzłowi i lub k). Jeśli p nie jest węzłem żadnego z elementów $e \in \mathcal{E}_q$, to całkę we wzorze (3.8) oblicza się zwykłymi metodami całkowania numerycznego. Jeśli p jest węzłem jednego z elementów $e \in \mathcal{E}_q$,

to funkcja podcałkowa ma osobliwość rzędu $1/r$. Całkę można obliczyć wg [1] lub za pomocą specjalnych wzorów numerycznego całkowania [8]. Jeśli $q \in \mathcal{W}'$, to w przypadku (1)

$$(3.10) \quad \delta_{pq}^e = \kappa \iint_{\Omega^e} \frac{L_q^e(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[L_i^e(\xi, \eta) + L_k^e(\xi, \eta)]^{\lambda_q} [(x_p - \xi)^2 + (y_p - \eta)^2]^{1/2}},$$

$\{i, k\} \subset \mathcal{W}'$; i, k są węzłami elementu Ω^e . W przypadku 2 natomiast jest:

$$(3.11) \quad \delta_{pq}^e = \kappa \iint_{\Omega^e} \frac{L_q^e(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[L_k^e(\xi, \eta)]^{\lambda_q} [(x_p - \xi)^2 + (y_p - \eta)^2]^{1/2}},$$

$k \in \mathcal{W}'$, k jest węzłem elementu Ω^e .

Tablica 1. Wartości wykładnika λ w zależności od kąta 2α

2α	λ		2α	λ	
	wg RWACZEWA	wg BAZANTA		wg RWACZEWA	wg BAZANTA
0	1	1	π	0,5	0,5
$\frac{\pi}{6}$	0,87	—	$\frac{7}{6}\pi$	0,44	—
$\frac{\pi}{4}$	—	0,793	$\frac{5}{4}\pi$	—	0,360
$\frac{\pi}{3}$	0,77	—	$\frac{4}{3}\pi$	0,38	—
$\frac{\pi}{2}$	0,69	0,704	$\frac{3}{2}\pi$	0,31	0,184
$\frac{2}{3}\pi$	0,62	—	$\frac{5}{3}\pi$	0,23	—
$\frac{3}{4}\pi$	—	0,640	$\frac{7}{4}\pi$	—	0,040
$\frac{5}{6}\pi$	0,56	—	$\frac{11}{6}\pi$	0,13	—
π	0,5	0,5	2π	0	0

Jeśli $p = q$, to funkcje podcałkowe we wzorach (3.10) i (3.11) mają osobliwość rzędu $1/r^{(1+\lambda)}$. Całki takie są zbieżne, jeśli $1 + \lambda < 2$ ([9], 3, str. 185), co zachodzi zawsze, bowiem z badań RWACZEWA [6, 7] i BAZANTA [10] wynika, że zawsze jest $\lambda < 1$ z wyłączeniem przypadku szczególnego, w którym kąt rozwarcia jest równy zeru ($\lambda = 1$). W pracach [6, 7, 10] wyznaczono wartości λ dla stempla w kształcie klina nieograniczonego o kącie rozwarcia krawędzi 2α wciskanego w półprzestrzeń sprężystą. Wyniki RWA-

CZEWA i BAŻANTA różnią się nieznacznie. Obaj autorzy stosowali różne przybliżone metody obliczeń. W tablicy 1 zestawiono wyniki otrzymane przez obu autorów.

3.3. Problemy numeryczne przy obliczaniu całek

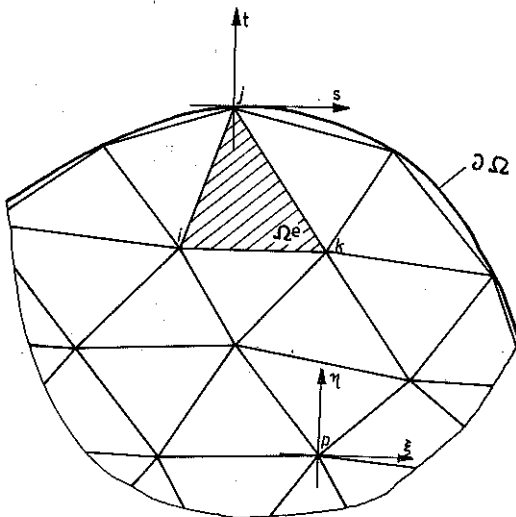
Obliczanie całek występujących we wzorach (3.10) i (3.11) stanowi dość poważny problem i zostanie poniżej omówione.

We wzorze (3.10) dotyczącym elementu przyległego do $\partial\Omega$ w przypadku 1 przyjmijmy $q = j$ ($j \in \mathcal{N}''$) oraz wprowadźmy układy współrzędnych (ξ, η) i (s, t) pokazane na rys. 12. Osie ξ i s są równoległe do boku ik trójkąta Ω^e . Wówczas $L_i + L_k = (\eta + t_p)/h_1$, $L_j = 1 - (\eta + t_p)/h_1$, $h_1 = t_i = t_k$ i wzór (3.10) przyjmuje postać:

$$(3.12) \quad \delta_{pj}^e = \kappa \varepsilon_1 \int_{-t_p}^{h_1 - t_p} \left[\int_{p_{ij}(\eta)}^{p_{jk}(\eta)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right] \frac{1 - (\eta + t_p)/h_1}{[(\eta + t_p)/h_1]^{\lambda_j}} d\eta =$$

$$= \kappa \varepsilon_1 \int_{-t_p}^{h_1 - t_p} \ln \left| \frac{p_{jk} + \sqrt{p_{jk}^2 + \eta^2}}{p_{ij} + \sqrt{p_{ij}^2 + \eta^2}} \right| \cdot \frac{1 - (\eta + t_p)/h_1}{[(\eta + t_p)/h_1]^{\lambda_j}} d\eta,$$

gdzie $\varepsilon_1 = \text{sgn } h_1$, $p_{ij} = a_{ij}\eta + b_{ij}$, $p_{jk} = a_{jk}\eta + b_{jk}$; p_{ij} i p_{jk} są równaniami prostych przechodzących przez węzły i, j oraz j, k . Dokonując zamiany zmiennej całkowania wg wzoru $\eta = t - t_p$, otrzymamy dalej



Rys. 12

$$(3.13) \quad \delta_{pj}^e = \varepsilon_1 \times \int_0^{h_1} \frac{\Phi(t)(1-t/h_1) dt}{(t/h_1)^{\lambda_j}},$$

gdzie

$$(3.14) \quad \Phi(t) = \ln \left| \frac{(a_{jk}t - t_p) + \sqrt{(a_{jk}t - s_p)^2 + (t - t_p)^2}}{(a_{ij}t - t_p) + \sqrt{(a_{ij}t - s_p)^2 + (t - t_p)^2}} \right|.$$

W przypadku szczególnym, gdy $p = j$ ($s_p = t_p = 0$), całkę we wzorze (3.13) można wyznaczyć wzorem

$$(3.15) \quad \delta_{jj}^e = \varepsilon_1 \frac{\kappa h_1}{(1 - \lambda_j)(2 - \lambda_j)} \ln \left| \frac{\varepsilon_1 a_{jk} + \sqrt{1 + a_{jk}^2}}{\varepsilon_1 a_{ij} + \sqrt{1 + a_{ij}^2}} \right|.$$

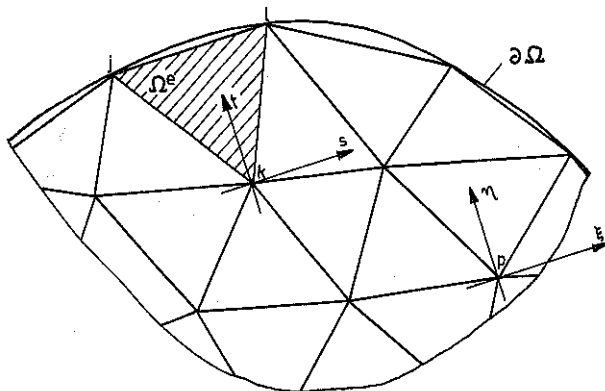
Rozpatrzmy następnie wzór (3.11) dotyczący elementu przylegającego do $\partial\Omega$ w przypadku (2). Dalsze rozważania ilustruje rys. 13. Do całkowania po trójkącie jlk wykorzystane będą dwa układy współrzędnych: (ξ, η) i (s, t) . Osie ξ i s są równoległe do odcinka jl . Przyjmijmy we wzorze (3.11) $q = j$ ($j \in \text{''}''$). Uwzględniając, że $L_j^e = \alpha_j \xi + \beta_j \eta + \alpha_j s_p + \beta_j t_p$, $L_k^e = 1 - (\eta + t_p)/h_2$, $h_2 = t_j = t_i$, $\alpha_j = 1/(s_j - s_i)$, $\beta_j = -s_i \alpha_j / h_2$, można wzór (3.11) zapisać w następującej postaci:

$$(3.16) \quad \delta_{pj}^e = \varepsilon_2 \times \int_{-t_p}^{h_2 - t_p} \left[\int_{p_{kj}(n)}^{p_{kl}(n)} \frac{\alpha_j \xi + \beta_j \eta + \alpha_j s_p + \beta_j t_p}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi \right] \times \frac{d\eta}{[1 - (\eta + t_p)/h_2]^{\lambda_j}},$$

gdzie: $\varepsilon_2 = \text{sgn } h_2$, $p_{kl} = a_{kl} \eta + b_{kl}$, $p_{kj} = a_{kj} \eta + b_{kj}$.

Wzór (3.16) można przedstawić następująco:

$$(3.17) \quad \delta_{pj}^e = \varepsilon_2 \times [\alpha_j (I_1 + s_p I_2) + \beta_j I_3],$$



Rys. 13

gdzie:

$$(3.18) \quad I_1 = \int_{-t_p}^{h_2-t_p} \left[\int_{p_{kj}}^{p_{kl}} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right] \frac{d\eta}{[1 - (\eta + t_p)/h_2]^{\lambda_j}} = \int_0^{h_2} \frac{\Psi_1(t) dt}{(1-t/h_2)^{\lambda_j}},$$

$$(3.19) \quad I_2 = \int_{-t_p}^{h_2-t_p} \left[\int_{p_{kj}}^{p_{kl}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right] \frac{d\eta}{[1 - (\eta + t_p)/h_2]^{\lambda_j}} = \int_0^{h_2} \frac{\Psi_2(t) dt}{(1-t/h_2)^{\lambda_j}},$$

$$(3.20) \quad I_3 = \int_{-t_p}^{h_2-t_p} \left[\int_{p_{kj}}^{p_{kl}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right] \frac{(\eta + t_p) d\eta}{[1 - (\eta + t_p)/h_2]^{\lambda_j}} = \int_0^{h_2} \frac{t \Psi_2(t) dt}{(1-t/h_2)^{\lambda_j}},$$

$$(3.21) \quad \Psi_1(t) = \sqrt{(a_{kl} t - s_p)^2 + (t - t_p)^2} - \sqrt{(a_{kj} t - s_p)^2 + (t - t_p)^2},$$

$$\Psi_2(t) = \ln \left| \frac{(a_{kl} t - s_p) + \sqrt{(a_{kl} t - s_p)^2 + (t - t_p)^2}}{(a_{kj} t - s_p) + \sqrt{(a_{kj} t - s_p)^2 + (t - t_p)^2}} \right|.$$

Funkcje podcałkowe we wzorach (3.18) mają osobliwość dla $t = h_2$. Obliczenie tych całek wymaga wydzielenia osobliwości i wykorzystania metod całkowania numerycznego. Sposób postępowania pokażemy na przykładzie całki I_1 . Pozostałe całki oblicza się analogicznie

Jeśli $p \notin \{j, k, l\}$, to

$$(3.22) \quad I_1 = \int_0^{h_2} \frac{\Psi_1(t) - \Psi_1(h_2)}{(1-t/h_2)^{\lambda_j}} dt + \Psi_1(h_2) \frac{h_2}{1-\lambda_j}.$$

Jeśli $p = j$ (wówczas $t_p = h_2$, $s_p = a_{kj} h_2$), to

$$(3.23) \quad I_1 = I_{11} - I_{12},$$

gdzie

$$(3.24) \quad I_{11} = \int_0^{h_2} \frac{\omega(t, a_{kl}) - \omega(h_2, a_{kl})}{(1-t/h_2)^{\lambda_j}} dt + \omega(h_2, a_{kl}) \frac{h_2}{1-\lambda_j},$$

$$(3.25) \quad I_{12} = \int_0^{h_2} \frac{\sqrt{(a_{kj} t - s_p)^2 + (t - t_p)^2}}{(1-t/h_2)^{\lambda_j}} dt = \varepsilon_2 h_2^2 \frac{\sqrt{1 + a_{kj}^2}}{2 - \lambda_j},$$

$$(3.26) \quad \omega(t, a) = \sqrt{(at - s_p)^2 + (t - h_2)^2}.$$

Jeśli $p = l$ (wówczas $t_p = h_2$, $s_p = a_{kl} h_2$), to I_{11} i I_{12} we wzorze (3.23) wyrażają się następująco:

$$(3.27) \quad I_{11} = \int_0^{h_2} \frac{\sqrt{(a_{ki} t - s_p)^2 + (t - t_p)^2}}{(1 - t/h_2)^{\lambda_j}} dt = \varepsilon_2 h_2^2 \frac{\sqrt{1 + a_{ki}^2}}{2 - \lambda_j},$$

$$(3.28) \quad I_{12} = \int_0^{h_2} \frac{\omega(t, a_{kj}) - \omega(h_2, a_{kj})}{(1 - t/h_2)^{\lambda_j}} dt + \omega(h_2, a_{kj}) \frac{h_2}{1 - \lambda_j}.$$

Jeśli $p = k$ (wówczas $s_p = t_p = 0$), to

$$(3.29) \quad I_1 = \int_0^{h_2} \frac{\Psi_1(t) dt}{(1 - t/h_2)^{\lambda_j}} = \varepsilon_2 \frac{h_2^2}{(1 - \lambda_j)(2 - \lambda_j)} (\sqrt{1 + a_{ki}^2} - \sqrt{1 + a_{kj}^2}).$$

Funkcje podcałkowe we wzorach (3.13) (3.22), (3.24) i (3.28) nie zawierają osobliwości i są całkowlne w sensie właściwym. Występujące nieoznaczoności (np. we wzorze (3.22) dla $t = h_2$ jest nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$) mają granice równe zeru we wszystkich przypadkach. Pod omawianymi całkami pojawiają się jednak osobliwości pochodnej dla $t = 0$ w przypadku całki (3.13) i dla $t = h_2$ w przypadku całek (3.22), (3.24) i (3.28), co ma wpływ na dokładność całkowania numerycznego, w szczególności na możliwość oszacowania błędu. Osiągnięcie regularności funkcji podcałkowych dostatecznie wysokiego rzędu jest wprawdzie możliwe przez odpowiedni dobór funkcji pochłaniającej osobliwości ([9], 2, str. 552), jednakże wiąże się to z kłopotliwym obliczaniem wartości pochodnych funkcji Φ , Ψ_1 i ω i prowadzi do bardzo rozbudowanych wzorów. W niniejszej pracy ograniczono się do zapewnienia regularności funkcji podcałkowych bez regularności ich pochodnych. Całkowanie numeryczne w takiej sytuacji wymaga stosowania złożonych kwadratur niskiego rzędu w ten sposób, że zwiększamy liczbę podprzedziałów przedziału całkowania aż do uzyskania stabilizacji wyników w dwóch kolejnych przybliżeniach. Przeprowadzone eksperymenty numeryczne wskazują, że wystarczającą dokładność uzyskuje się już przy podziale na dwa podprzedziały, przy czym podprzedział zawierający punkt osobliwy pochodnej funkcji podcałkowej jest znacznie krótszy (wynosi np. 0,1 L , gdzie L długość przedziału całkowania). Bardzo dobre rezultaty uzyskano również wykorzystując metodę opisaną w [11] (str. 124).

Do obliczeń załączonych dalej przykładów liczbowych przyjęto podział przedziału całkowania na trzy podprzedziały. W każdym z podprzedziałów stosowano czteropunktowe kwadratury Gaussa [12].

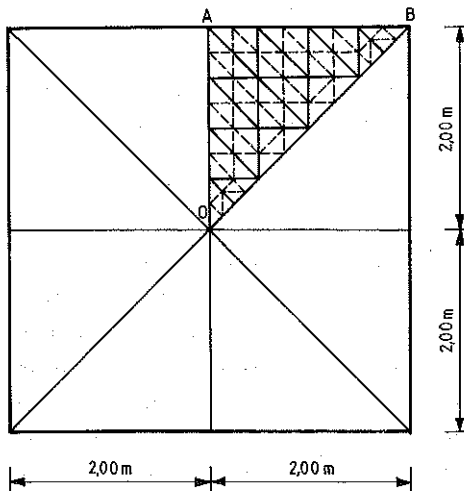
3.4. Równania płyty leżącej na półprzestrzeni sprężystej

Dotychczasowe rozważania odnosiły się do półprzestrzeni sprężystej, realizacji metody elementów brzegowych i zastosowania elementów osobliwych przy wyznaczaniu macierzy podatności podłoża. Dalsza realizacja postawionego zadania wymaga zastosowania metody elementów skończonych do płyty, budowy macierzy sztywności i wykorzystania warunku zgodności ugięć płyty i przemieszczeń podłoża. Tych problemów nie będziemy tu omawiać, odsyłając zainteresowanych do pracy [1].

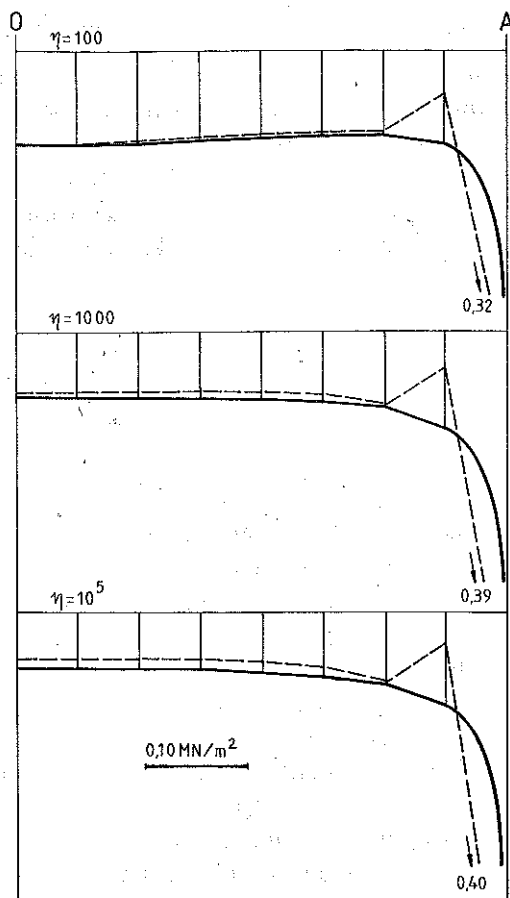
4. PRZYKŁADY

4.1.

Płyta kwadratowa $4,00 \times 4,00$ m spoczywająca na półprzestrzeni sprężystej jest obciążona równomiernie $p = 0,10$ MN/m². Dla podłoża przyjęto moduł sprężystości $E_0 = 10$ MN/m² i współczynnik Poissona $\nu_0 = 0,3$. Dla płyty przyjęto moduł sprężystości $E = \eta E_0$, współczynnik Poissona $\nu = 1/6$ i wysokość $h = 0,3$ m. Podział płyty na elementy skończone (linie ciągłe) i na elementy powierzchniowe (linie przerywane) pokazano na rys. 14. Na rys. 15 i 16 pokazano wykresy odporu podłoża w przekrojach odpowiednio $O-A$ i $O-B$ dla trzech różnych wartości $\eta = E/E_0$. Linia ciągła dotyczy wyników uzyskanych przy zastosowaniu elementów powierzchniowych osobliwych (OSO). Dla węzłów na brzegu gładkim przyjęto $\lambda = 0,5$ i dla węzłów narożnikowych — $\lambda = 0,69$ (wg Rwaczewa). Linia przerywana dotyczy wyników uzyskanych przy zastosowaniu elementów nieosobliwych (NOS), tzn. dla



Rys. 14

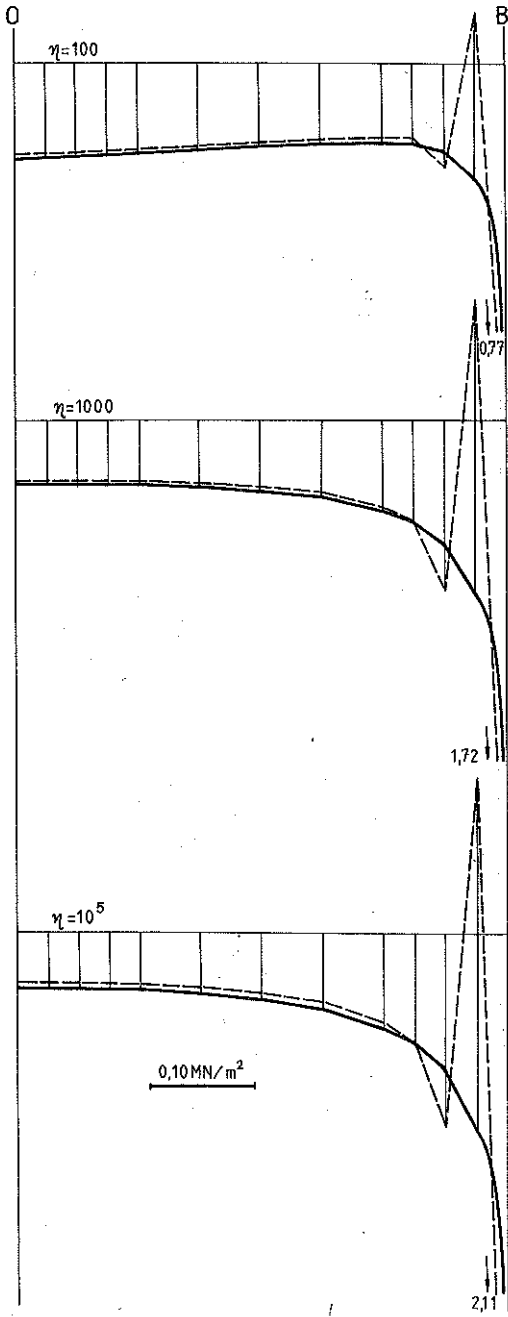


Rys. 15

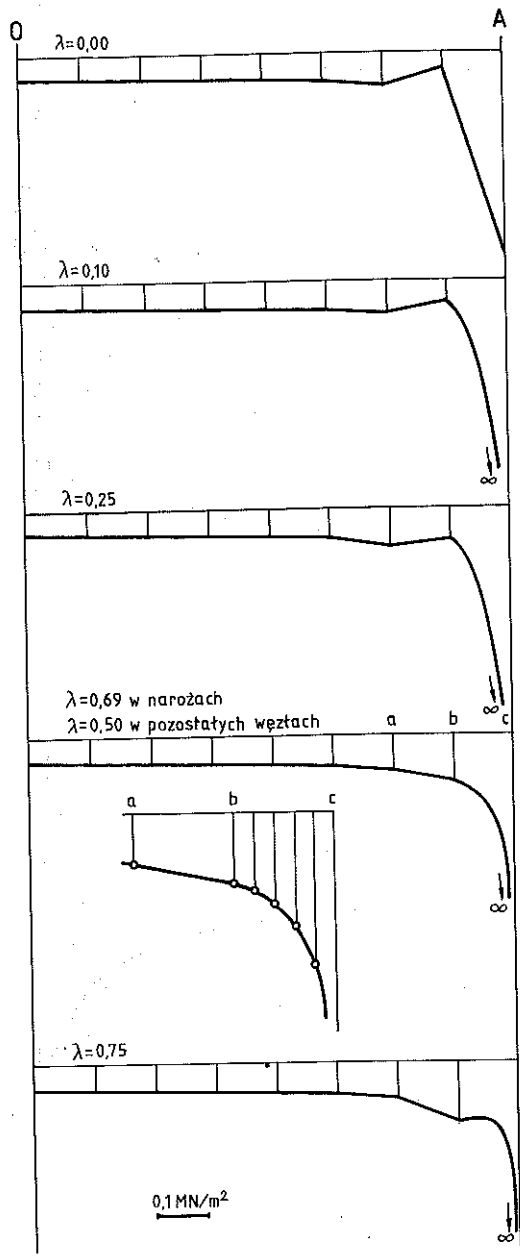
$\lambda = 0$. Warto zwrócić uwagę na zasadniczą różnicę w jakości wyników uzyskiwanych za pomocą elementów NOS i OSO.

4.2.

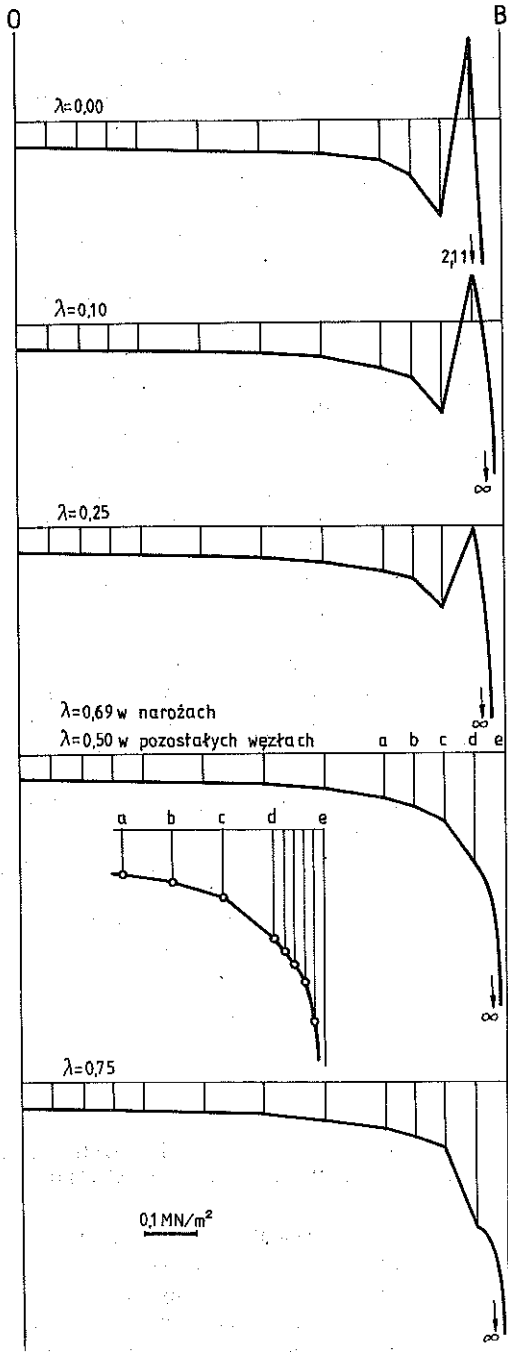
Stempel kwadratowy o tych samych wymiarach (rys. 14) jest obciążony osiowo siłą $P = 1,6 \text{ MN}$. Parametry podłoża są takie same, jak w przykładzie poprzednim. Wykresy odporu podłoża przedstawiają rysunki 17 (przekrój $O-A$) i 18 (przekrój $O-B$). Przeprowadzono teraz eksperyment numeryczny polegający na wykonaniu obliczeń dla różnych wartości λ , od $\lambda = 0$ (element NOS) do $\lambda = 0,75$. Na rys. 17 wykres odporu jest prawidłowy tylko dla prawidłowej wartości $\lambda = 0,5$ (zwróćmy uwagę na to, że krzywa odporu jest gładka na przejściu z elementu przedskrajnego do skrajnego). Na rys. 18 najbardziej prawidłowy wykres odporu otrzymano dla $\lambda = 0,69$, przyjętego



Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18

stosownie do wyniku Rwaczewa. Przyjęcie λ zbyt odległego od wartości prawidłowej powoduje w okolicy brzegu zaburzenia zniekształcające wykres odporu w stopniu przeczącym fizycznym właściwościom układu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. CYROK, R. ŚWITKA, *Obliczanie płyt na półprzestrzeni sprężystej metodą elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., **29**, 4, 381—394, 1983.
2. G. CYROK, R. ŚWITKA, *Studium stempla na półprzestrzeni sprężystej z więzami jednostronnymi przy obciążeniach mimośrodkowych*, XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, 1, Krynica 1985, pp. 35—40.
3. I. E. AKIN, *The generation of elements with singularities*, Int. J. Num. Meth. Engng., **10**, 6, 1249—1259, 1976.
4. P. W. BROTHERS, G. B. SINCLAIR, C. M. SEGEDIN, *Uniform indentation of the elastic half-space by a rigid rectangular punch*, Int. J. Solid Struct., **13**, 11, 1039—1072, 1977.
5. E. N. MASTROIANNIS, L. M. KEER, T. MURA, *Numerical solutions of a three-part mixed boundary value problem of linear elasto-statics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **39**, 1, 93—101, 1983.
6. В. Л. РВАЧЕВ, *О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина*, ПММ, 1, 169—173, 1959.
7. В. Л. РВАЧЕВ, В. С. ПРОЦЕНКО, *Контактные задачи теории упругости для неклассических оболочек*, Изд. Науковая Думка, Киев 1977.
8. H. L. G. PINA, J. L. M. FERNANDES, C. A. BREBBIA, *Some numerical integration formulae over triangles and squares with $1/r$ singularity*, Appl. Math. Modelling, **5**, 209—211, 1981.
9. G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, 2 i 3, PWN, Warszawa 1976.
10. Z. P. BAŽANT, *Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general numerical method*, Int. J. Engng. Sci., **12**, 3, 221—243, 1974.
11. J. STOER, *Wstęp do metod numerycznych*, 1, PWN, Warszawa 1979.
12. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa 1980.

Резюме

ОСОБЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ В АНАЛИЗЕ ПЛИТ И ШТАМПОВ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Работа касается задачи плит и штампов вдавливаемых в упругое полупространство. Компьютерные расчеты реализуются при применении метода конечных элементов к плите и метода граничных элементов к упругому полупространству. Показано, что линейная аппроксимация в граничных элементах, смежных с гранью плиты или штампа, приводит к значительному деформированию результатов. Правильные численные результаты, совпадающие почти точно с аналитическими, можно получить, применяя граничные элементы с особенностью на периметре плиты или штампа. Концепция особого элемента является в работе предметом многочисленных анализов. Тезис авторов подтверждают примеры расчетов.

SUMMARY

SINGULAR SURFACE ELEMENT IN THE ANALYSIS OF PLATES
AND PUNCHES ON ELASTIC HALF-SPACE

The paper deals with the problems of elastic plates and rigid punches pressed into an elastic half-space. Computer calculations were carried out: the finite element method is applied to the plate, and the boundary element method to the elastic half-space. It was proved that the linear approximation performed in boundary elements adjacent to the edges of the plate or punch leads to significant distortion of results. Correct numerical results that almost precisely coincide with the analytical ones can be obtained by means of the boundary elements with singularity at the plate or punch perimeter. The idea of the element with singularity is broadly analyzed in the paper; author's thesis is confirmed by the results of examples.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, ZIELONA GÓRA

i

POLITECHNIKA POZNAŃSKA, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 listopada 1987 r.
