

WPLYW HISTORII WZGLĘDNEGO RUCHU SKŁADNIKÓW NA SIŁY ODDZIAŁYWANIA I PARAMETRY PROPAGACJI FAL W OŚRODKU POROWATYM WYPEŁNIONYM CIECZĄ

MARIUSZ KACZMAREK i JÓZEF KUBIK (POZNAŃ)

W pracy zaproponowano uzupełnienie postaci funkcji opisujących siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy składnikami ośrodka porowatego nasyconego cieczą efektem ich zależności od historii względnego ruchu. Na podstawie analizy zagadnień opływu kulki i przepływu cieczy przez kanał przedyskutowano przesłanki fizyczne uzasadniające wprowadzenie rozważanego efektu do makrokontynuального opisu ośrodka porowatego. Szczegółowo rozpatrzono wpływ historii na parametry propagacji fal harmonicznycch dla dwóch modeli ośrodka (kanalikowego i kulkowego). Na podstawie otrzymanycch rezultatów numerycznych oceniono zakres istotnego wpływu badanego efektu na propagację fal harmonicznycch.

1. WSTĘP

W pracy [1] przeanalizowano wpływ geometrycznej struktury porów izotropowego ośrodka przepuszczalnego na parametry propagacji fal harmonicznycch w takim ośrodku nasyconym cieczą. Rozważania przeprowadzono używając opisu z dwuparametrową charakterystyką wewnętrznycch struktury ośrodka. Jednym parametrem jest porowatość objętościowa, a drugim parametr strukturalnej przepuszczalności, [2], określający podział ośrodka na tzw. składniki wirtualne (w ogólnoci różne od składniczków fizycznych tj. cieczy i porowatego szkieletu). W przypadku opisu odniesionego do składniczków fizycznych parametr ten określa natomiast wielkość sprężenia dynamicznego, którego źródłem jest wewnętrznycch struktura ośrodka porowatego. Z uwagi na postawiony cel, w pracy [1] przyjęto, że sprężenia siłowe pomiędzy szkieletem i fazą ciekłą towarzyszące ich ruchowi względnemu charakteryzowane są współczynnikiem stałymi, określonymi wyłącznie przez własności wewnętrznycch struktury ośrodka porowatego i własności cieczy. Konsekwencją takiego założenia jest przede wszystkim to, że:

1) współczynnik określający siłę sprężenia dyfuzyjnego nie zależy od charakteru rozważanego zagadnienia: ustalonego czy nieustalonego w czasie

(założenie analogiczne jak hipoteza quasi-stacjonarności przy nieustalonych przepływach w rurach, [3]);

2) wielkość sprzężenia dynamicznego (siły proporcjonalnej do względnego przyspieszenia składników fizycznych [4]) jest określona wyłącznie przez parametr charakteryzujący strukturę porów.

Tak przyjęte założenia, przy opisie wymiany pędu pomiędzy składnikami ośrodka porowatego umożliwiły zbadanie wpływu geometrycznej struktury porów na parametry propagacji fal w materiale przepuszczalnym. Jednakże, w ruchu względnym lepkiej cieczy i porowatego szkieletu istotny wpływ na wielkość wzajemnych oddziaływań siłowych może mieć uwzględnienie historii względnego ruchu (przebiegu zmian względnej średniej prędkości). Wskazują na to wyniki jakościowych analiz zagadnień opływu obiektów (np. kulek) lub przepływów przez kanały, które to zagadnienia są często wykorzystywane do modelowania zjawisk w ośrodku porowatym nasyconym cieczą. Wówczas, w przypadku ruchu harmonicznego efekt historii manifestuje się zależnością sił oddziaływania i parametrów fal od częstotliwości.

Celem niniejszej pracy jest wskazanie na możliwość uwzględnienia efektu historii względnego ruchu w ramach dwuparametrowego opisu ośrodka porowatego nasyconego cieczą oraz przeanalizowanie wpływu historii na parametry propagacji fal harmonicznycch w szerokim zakresie częstotliwości. Jako przykład rozważa się propagację fal harmonicznycch w piaskowcu Berea nasyconym wodą.

2. UWAGI O EFEKCIE HISTORII

Posługiwanie się wielkościami uśrednionymi w makroskopowym opisie ośrodka porowatego daje możliwość jedynie przybliżonego wyrażenia mikroskopowego stanu ośrodka. Aby za pomocą wielkości średnich wyrazić stany mikroskopowe, decydujące o wzajemnych oddziaływaniach siłowych pomiędzy składnikami ośrodka, poszukuje się zwykle związku pomiędzy siłami a chwilowymi wartościami wielkości makroskopowych, takich jak: prędkości, przyspieszenia składników, własności cieczy i własności struktury geometrycznej porowatego szkieletu. I tak np. lokalną (w sensie makroskopowym) siłę oporu przepływającej cieczy lepkiej przez ośrodek porowaty, w zagadnieniach ustalonych, z dobrym przybliżeniem opisuje się funkcją liniową lub kwadratową względem aktualnej średniej prędkości względnej składników, [5]. Natomiast w przypadku zagadnienia nieustalonego, dodatkowo, występuje zależność siły oddziaływania od przyspieszenia względnego składników (ogólnione prawo Darcy'ego [6]).

Istnieją jednakże podstawy do tego aby siły wzajemnego oddziaływania poszerzyć o efekt ich zależności od historii zmian względnej prędkości składników. Wynika to np. z analizy jakościowych rezultatów otrzymanych

przy opisie względnego ruchu cieczy w kanale lub ruchu kulki w cieczy (patrz Dodatek). W obu przypadkach siły oddziaływania pomiędzy fazami zależą od wcześniejszego przebiegu w czasie względnego ruchu. Przeniesienie tych efektów na ośrodek porowaty wypełniony cieczą wymaga uzupełnienia sił oddziaływania złożonych z oporu dyfuzyjnego i oddziaływań dynamicznych, [1], o siły zależne od historii względnego ruchu cieczy mające postać całek po czasie z funkcji zależnej od zmian względnej prędkości. W przypadku szczególnym, dla drgań harmonicznym, zależność od historii sprowadza się od zależności sił oddziaływania od częstotliwości, analogicznie jak w rozważanych w Dodatku układach. Choć wówczas składowe te nie mają postaci całkowitej to wyrażają one efekt historii, jako że wzory przedstawiające zależność siły oddziaływania od częstotliwości otrzymuje się z postaci całkowitej przyjmując, że w przeszłości ruch odbywał się z taką samą częstotliwością.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że choć z założenia materiały wyjściowe obu składników nie są materiałami z pamięcią, to makroskopowe siły oddziaływania mogą zależeć w ogólności od historii względnego ruchu. Należy również nadmienić, że efekt ten jest uwzględniany w niektórych teoriach nierozpuszczalnych mieszanin z tzw. fazą dyspersyjną (patrz np. [7]).

3. PRZEGLĄD DOTYCHCZASOWYCH REZULTATÓW

W znanej autorom literaturze poświęconej analizie sił oddziaływania w ośrodkach porowatych nasyconych cieczą nie badano problemu zależności tych sił od historii względnego ruchu składników w przypadku dowolnego, nieustalonego ruchu. Uwzględniono natomiast zależność sił oddziaływania od częstotliwości, rozważając propagację fal harmonicznym.

Pierwszą pracą w której analizuje się wpływ częstotliwości na siłę oddziaływania pomiędzy cieczą i porowatym szkieletem jest praca BIOTA z 1956 roku [4]. Autor stwierdza w niej, że dla wysokich częstotliwości ruch względny cieczy nie ma charakteru przepływu Poiseuille'a. W konsekwencji postać siły oddziaływania, określona dla ruchu ustalonego przy założeniu przepływu Poiseuille'a, powinna być zmodyfikowana tak, by zależała od częstotliwości. Ażeby znaleźć postać funkcji poprawkowej Biot rozważał oscylacje cieczy w okrągłym kanale oraz między równoległymi płaszczyznami. Biorąc za punkt wyjścia równania Navier-Stokesa autor określił związki między średnią, względną prędkością cieczy a siłą oddziaływania ze ścianami kanałów. Uzyskał w ten sposób zespoloną funkcję, zależną od częstotliwości, modyfikującą współczynnik oporu przepływu w kanale, właściwy dla zagadnienia ustalonego. Tak otrzymaną poprawkę wprowadził

następnie jako mnożnik do dyfuzyjnej siły oddziaływania między składnikami ośrodka porowatego, uzyskując w ten sposób dodatkowy wyraz w sile oddziaływania zależny od częstotliwości.

Wyniki Biota wykorzystano w szeregu pracach [8—10] analizując zjawisko propagacji fal harmoniczných w ośrodkach porowatych oraz porównując przewidywania teorii i wyniki badań eksperymentalnych.

Istotną cechą poprawki wprowadzonej przez Biota jest to, że modyfikuje ona współczynnik oporu przepływu dla dużych częstotliwości oraz, że współczynnik poprawkowy ma wartość zespoloną. Konsekwencją pierwszego faktu jest pominięcie zależności siły oddziaływania od częstotliwości w zakresie niskich i średnich jej wartości. Natomiast zespolony charakter funkcji poprawkowej wskazuje na zgodność faz urojonej części zmodyfikowanej siły dafuzji i względnego przyspieszenia.

Ostatni z wniosków wymienionych wyżej został niefortunnie wykorzystany w pracy [11]. Autorzy tej pracy, opierając się na analizie Biota dotyczącej oscylacji cieczy w rurze, badali siły oddziaływania w ośrodku porowatym. Stwierdzając fakt, że zespolona część siły dyfuzyjnej (zmodyfikowanej funkcją częstotliwości) może być traktowana jako siła proporcjonalna do względnego przyspieszenia uznali, że stanowi ona całkowitą siłę sprzężenia dynamicznego występującą w równaniach ruchu ośrodka porowatego. W ten sposób autorzy pracy [11] pominieli możliwość występowania niezależnie siły sprzężenia dynamicznego, której źródłem jest sama struktura geometryczna porowatego szkieletu a na istnienie której wskazują inne prace (np. [12—14]).

Takiego błędu uniknięto w pracy [15] poświęconej wyznaczaniu współczynników występujących w siłach oddziaływania. Jako model struktury porów dla ośrodka izotropowego rozważano układ krzyżujących się kanałów. Analizując oscylacje cieczy w ośrodku z taką strukturą wyznaczono współczynniki określające siłę dyfuzji i siłę sprzężenia dynamicznego w funkcji częstotliwości. Istnienie w rozważanym modelu kanałów, w których ciecz płynie w kierunku innym niż makroskopowy kierunek gradientu ciśnienia zapewnia, że efekt sprzężenia dynamicznego obejmuje zarówno wpływ przyjętej struktury jak i historii ruchu. W pracy [15] zbadano ponadto zależności prędkości i tłumienia harmonicznęj fali szybkiej od częstotliwości.

Podobne rezultaty odnośnie zależności sił oddziaływania od częstotliwości, w postaci tzw. uogólnionego prawa Darcy'ego otrzymano w pracy [6]. Analiza ośrodka porowatego o powtarzalnej strukturze geometrycznej metodą teorii homogenizacji pozwoliła ustalić postać współczynników określających oddziaływania cieczy ze szkieletem w funkcji częstotliwości. Otrzymane rezultaty teoretyczne, dla wybranych struktur, porównano z wynikami eksperymentalnymi.

Wspólną cechą wyżej wymienionych prac jest to, że uwzględnia się w nich zależność współczynników określających siły oddziaływania między składni-

kami od częstotliwości fal. Dla wyznaczenia postaci funkcji opisujących te zależności wykorzystano wyniki analizy ruchu oscylacyjnego cieczy w strukturze prostych kanałów. Mankamentem tych prac jest to, że nie zawierają one wyjaśnienia w kategoriach makroskopowych, fizycznych przyczyn zależności współczynników występujących w siłach oddziaływania od częstotliwości. Nie próbuje się również odpowiedzieć jaka będzie postać tych sił w przypadku dowolnego nieustalonego ruchu względnego składników.

Wprowadzenie koncepcji uzależnienia sił oddziaływania od historii względnego ruchu umożliwia, zdaniem autorów, skonstruowanie teorii bez wyżej wymienionych niedostatków. W dalszej części pracy wskażemy na możliwość i celowość uwzględnienia efektu historii względnego ruchu lepkiej cieczy i porowatego szkieletu w ramach dwuparametrowego opisu takiego ośrodka.

4. RÓWNANIA WYJŚCIOWE

Podstawowe równania bilansowe dla ośrodka porowatego nasyconego cieczą z dwuparametrową charakterystyką struktury porów, na tle teorii mieszanin (teorii objętościowej) podano i przedyskutowano w pracy [1]. Istotą teorii dwuparametrowej jest to, że może być ona odniesiona zarówno do składników fizycznych — odpowiednio cieczy i porowatego szkieletu — jak też składników wirtualnych, tzn. cieczy swobodnej oraz porowatego szkieletu z cieczą dołączoną, rozróżnialnych z kinematycznego punktu widzenia. Do analizy zagadnień dynamicznych ten drugi opis jest wygodniejszy gdyż parametry charakteryzujące wewnętrzną strukturę ośrodka występują w postaci jawnej, dogodnej do analizy jakościowej i ilościowej.

W dalszych rozważaniach skorzystamy więc z opisu odniesionego do składników wirtualnych zapisując jednocześnie odpowiednie zależności, tam gdzie to będzie uzasadnione, dla składników fizycznych.

Gęstości szkieletu i cieczy dołączonej (składnik (1)) oraz cieczy swobodnej (składnik (2)) są zdefiniowane następująco

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \bar{\rho}^1 &= \bar{\rho}^s + (1 - \kappa) \bar{\rho}^f, \\ \bar{\rho}^2 &= \kappa \bar{\rho}^f, \quad \kappa = \frac{\lambda}{f_v}, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\rho}^s$ i $\bar{\rho}^f$ są gęstościami parcjalnymi odpowiednio szkieletu i cieczy, i związane są z gęstościami efektywnymi jak następuje

$$\bar{\rho}^s = \rho^s(1 - f_v), \quad \bar{\rho}^f = \rho^f f_v.$$

Parametry f_v i λ charakteryzują geometryczne własności struktury porów

ośrodka, przy czym f_v jest porowatością objętościową a λ jest parametrem strukturalnej przepuszczalności [2]. Równania ciągłości mają postać:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}^1 + \operatorname{div}(\bar{q}^1 \mathbf{v}^1) &= \bar{g}^1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}^2 + \operatorname{div}(\bar{q}^2 \mathbf{v}^2) &= \bar{g}^2, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{v}^1 i \mathbf{v}^2 są prędkościami składników wirtualnych, natomiast \bar{g}^1 i \bar{g}^2 są funkcjami intensywności wymiany masy (zmiany masy dołączonej) i spełniają związek

$$(4.3) \quad \bar{g}^1 = -\bar{g}^2 \equiv \bar{g} = \bar{q}^s \frac{D}{Dt} \left[(1-\kappa) \frac{\bar{q}^f}{\bar{q}^s} \right].$$

Równania ruchu, w ogólnym nieliniowym przypadku, można zapisać jak następuje [16], [17]

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}^1 + \bar{q}^1 \mathbf{b}^1 + \bar{\mathbf{r}}^1 &= \bar{q}^1 \frac{D}{Dt} \mathbf{v}^1 + \frac{1}{2} \bar{g}^1 (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1), \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}^2 + \bar{q}^2 \mathbf{b}^2 + \bar{\mathbf{r}}^2 &= \bar{q}^2 \frac{D}{Dt} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{g}^2 (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\mathbf{T}}^1$ i $\bar{\mathbf{T}}^2$ są tensorami naprężenia, \mathbf{b} jest jednostkową siłą masową natomiast siły $\bar{\mathbf{r}}^1 = -\bar{\mathbf{r}}^2$ reprezentują całkowitą wymianę pędu pomiędzy składnikami wirtualnymi.

W ramach teorii liniowej, dla małych deformacji, równania ruchu upraszczają się do postaci

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}^1 + \bar{q}^1 \mathbf{b}^1 + \bar{\pi}^1 &= \bar{q}^1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^1, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}^2 + \bar{q}^2 \mathbf{b}^2 + \bar{\pi}^2 &= \bar{q}^2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^2, \end{aligned}$$

i siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy składnikami wirtualnymi można zapisać jako liniowe funkcje prędkości względnej

$$(4.6) \quad \bar{\pi}^1 = -\bar{\pi}^2 = \pi = b_1 (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1),$$

gdzie b_1 jest współczynnikiem oporu przepływu.

Zlinearyzowane równania ruchu dla składników fizycznych, równoważne równaniom (4.5), mają postać

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}^s + \bar{q}^s \mathbf{b} + \mathbf{r}^s &= \bar{q}^s \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^s, \\ \operatorname{div} \mathbf{T}^f + \bar{q}^f \mathbf{b} + \mathbf{r}^f &= \bar{q}^f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^f, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^s &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{T} + \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}, & \mathbf{T}^f &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}, \\ \mathbf{v}^s &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{v}, & \mathbf{v}^f &= (1 - \kappa) \frac{1}{\kappa} \mathbf{v} + \kappa \mathbf{v}, \end{aligned}$$

przy czym siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy fazą ciekłą i porowatym szkieletem są równe

$$(4.9) \quad \mathbf{r}^s = -\mathbf{r}^f = \left\{ b (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) - \bar{q}^f \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \right\}, \quad b = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 b_1.$$

Na podstawie porównania wzorów (4.9) i (4.6) jest widoczne, że w odróżnieniu od sił oddziaływania dla składników wirtualnych (4.6), reprezentowanych wyłącznie przez siły oporu, w opisie odniesionym do składników fizycznych na siły oddziaływania składają się siły dyfuzyjne oraz siły sprzężenia dynamicznego. Siła proporcjonalna do względnego przyspieszenia składników fizycznych (sprzężenie dynamiczne) jest związana z występowaniem w ruchu cieczy względem szkieletu efektu masy dołączonej.

Należy zauważyć, że w dotychczas formułowanej teorii dwuparametrowej parametr strukturalnej przepuszczalności λ , określający wirtualny podział ośrodka odzwierciedla jedynie własności struktury geometrycznej porowatego szkieletu. Parametr ten definiuje całkowite sprzężenie dynamiczne pomiędzy cieczą i porowatym szkieletem w przypadku kiedy na poziomie mikroskopowym siły dynamiczne w porównaniu z siłami lepkiemi mają decydujące znaczenie. Dla fal harmonicznycych odpowiada to zagadnieniom w zakresie wysokich częstotliwości. Taką wartością λ posługiwano się w pracy [1] przy badaniu wpływu struktury porów na parametry propagacji fal. Wówczas współczynniki b i $\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \bar{q}^f$ (wzór (4.9)) są określone wyłącznie przez własności cieczy i geometryczną strukturę porów; nie zależą natomiast od historii względnego ruchu składników.

Celem niniejszej pracy jest, w oparciu o przesłanki wynikające z obserwacji niestacjonarnych przepływów cieczy lepkiej przez kanały oraz opływu obiektów (kulek), przedstawionych w Dodatku, uwzględnienie wpływu historii zmian względnej prędkości na wymianę pędu pomiędzy cieczą i porowatym szkieletem. Na poziomie makroskopowym oznacza to konieczność uwzględ-

nienia w siłach oddziaływania dodatkowego wyrazu ujmującego efekt historii (taką rolę spełnia siła Basseta występująca przy niestacjonarnych opływach ciał).

Pozostając przy koncepcji składników wirtualnych, całkowitą siłę wzajemnego oddziaływania, uwzględniającą efekt historii zapiszemy w postaci sumy

$$(4.10) \quad \pi^* = \pi - \pi^h,$$

gdzie π jest dyfuzyjną siłą oddziaływania pomiędzy składnikami wirtualnymi nie uwzględniającą wpływu historii, natomiast π^h reprezentuje efekt wpływu wcześniejszego ruchu na wymianę pędu.

Sposób oszacowania wpływu historii na wymianę pędu dla drgań harmonicznym przedstawimy w następnym paragrafie.

5. EFEKT HISTORII W PRZYPADKU FAL HARMONICZNYCH

Dalszą analizę zależności sił oddziaływania od częstotliwości i jej wpływu na parametry fal przeprowadzimy dla ośrodka porowatego poddanego obciążeniu harmonicznemu. Określenie postaci siły π^h przeprowadzimy dla dwóch wybranych modeli ośrodka: modelu kanalikowego oraz modelu kulkowego.

5.1. Model kanalikowy

Rozważmy względny ruch cieczy swobodnej (składnik o gęstości $\lambda \rho^f$) w ośrodku porowatym nasyconym cieczą, przy nieruchomym szkielecie, czyli że $\mathbf{v} \equiv 0$. Liniowe równanie ruchu tego składnika przy pominięciu sił masowych przyjmuje postać

$$(5.1) \quad -\lambda \operatorname{grad} p - b_1 \mathbf{v} + \pi^h = \lambda \rho^f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v},$$

przy czym zaniedbano wpływ lepkości na naprężenia w cieczy i wykorzystano zależność $\hat{T} = -\lambda p \mathbf{1}$, gdzie p jest ciśnieniem w cieczy. Przyjmując, że ruch cieczy swobodnej w ośrodku porowatym może być modelowany ruchem cieczy w prostych, okrągłych kanałach, równanie równoważne z równaniem (5.1) otrzymamy mnożąc równanie ruchu cieczy w rurze (A.1) przez współczynnik λ . Otrzymamy wówczas po uwzględnieniu (A.3),

$$(5.2) \quad -\lambda \operatorname{grad} p - \lambda \rho^f \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} - \lambda \frac{8\mu}{R^2} (1 + \hat{\psi}) \mathbf{v} = \lambda \rho^f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v},$$

gdzie wielkości $\hat{\phi}$ i $\hat{\psi}$ określone są odpowiednio wzorami (A.4) i (A.5).

Jest widoczne, że siła wzajemnego oddziaływania pomiędzy cieczą i szkieletem, w ramach takiego modelu ma postać

$$(5.3) \quad \pi^h = -\lambda \varrho^f \bar{\phi} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}) - \lambda \frac{8\mu}{R^2} (1 - \bar{\psi}) (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}),$$

i składa się z wyrazu niezależnego od częstotliwości

$$\lambda \frac{8\mu}{R^2} \bar{\mathbf{v}},$$

oraz sumy

$$\lambda \varrho^f \bar{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} + \lambda \frac{8\mu}{R^2} \bar{\psi} \bar{\mathbf{v}},$$

zależnej od częstotliwości poprzez funkcje $\bar{\phi}$ i $\bar{\psi}$.

Odpowiednie zestawienie równań (5.1) i (5.2) pozwala określić siłę π^h dla kanalikowego modelu ośrodka porowatego jak następuje

$$(5.4) \quad \pi^h = -\lambda \varrho^f \bar{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} - b_1 \bar{\psi} \bar{\mathbf{v}}.$$

W równaniu powyższym zastąpiono niezależny od częstotliwości współczynnik $\lambda (8\mu/R^2)$ w składowej proporcjonalnej do prędkości współczynnikiem oporu przepływu b_1 z równania (5.1) (model kanalikowy wykorzystujemy tutaj tylko dla określenia wpływu historii).

Należy przy tym dodać, że określenie parametrów $\bar{\phi}$ i $\bar{\psi}$, reprezentujących wpływ historii na siły oddziaływania wymaga ustalenia średniej średnicy poru (kanału) ośrodka.

5.2. Model kulkowy

Przeanalizujemy ruch ośrodka porowatego przy którym prędkość cieczy swobodnej jest zerowa. Pomijając siły masowe równanie (4.5)₁ dla elementarnej objętości pierwszego składnika wirtualnego (szkielet + ciecz dołączona) można zapisać w postaci

$$(5.5) \quad \text{div } \bar{\mathbf{T}} - b_1 \bar{\mathbf{v}} + \pi^h = \varrho \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\mathbf{v}} \equiv \bar{\mathbf{v}}.$$

Równanie równoważne z równaniem (5.5) otrzymamy z analizy ruchu harmonicznego kulki w cieczy, opisanego zależnościami (B.1) i (B.3). Rozważając siły odniesione do jednostki objętości kulki równanie ruchu (B.1) możemy napisać jak następuje

$$(5.6) \quad \left(\frac{M}{\frac{4}{3} \pi a^3} + \frac{1}{2} \varrho^f \right) \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \varrho^f \overset{\parallel}{\phi} \frac{d}{dt} \mathbf{v} - \frac{g}{2} \frac{\mu}{a^2} (1 + \overset{\parallel}{\psi}) \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{\frac{4}{3} \pi a^3}.$$

Równanie (5.6) dotyczy ruchu tzw. masy wirtualnej tj. masy utworzonej z masy kulki i masy cieczy dołączonej. Dla otrzymania jakościowej równoważności równania (5.6) i równania ruchu (5.5) dla pierwszego składnika wirtualnego, pomnożymy równanie (5.6) przez współczynnik $(1-\lambda)$ reprezentujący udział objętościowy składnika o gęstości ϱ w jednostce objętości ośrodka. Wykorzystanie tak otrzymanego równania do opisu ruchu porowatego szkieletu modelowanego materiałem złożonym z kulek, wymaga założenia, że na siłę oddziaływania pomiędzy pojedynczą kulką i cieczą nie ma istotnego wpływu obecność kulek pozostałych. Wówczas całkowita siła wzajemnego oddziaływania pomiędzy porowatym szkieletem i cieczą, w ramach modelu kulkowego, przyjmuje postać

$$(5.7) \quad -(1-\lambda) \frac{1}{2} \varrho^f \overset{\parallel}{\phi} \frac{d}{dt} \mathbf{v} - (1-\lambda) \frac{g}{2} \frac{\mu}{a^2} (1 + \overset{\parallel}{\psi}) \mathbf{v},$$

z której wynika, że podobnie jak dla modelu kanalikowego, wyróżnić można składowe niezależne i zależne od częstotliwości drgań.

Zastępując współczynnik $(1-\lambda) \frac{g}{2} \frac{\mu}{a^2}$, określający niezależną od częstotliwości siłę dyfuzyjną dla zagadnienia ustalonego w modelu kulkowym przez współczynnik b_1 (model kulkowy wykorzystujemy tylko dla określenia efektu historii) otrzymamy, że siła reprezentująca wpływ historii dla kulkowego modelu materiału porowatego ma postać

$$(5.8) \quad \pi^h = -(1-\lambda) \frac{1}{2} \varrho^f \overset{\parallel}{\phi} \frac{\partial}{\partial t} (\overset{2}{\mathbf{v}} - \overset{1}{\mathbf{v}}) - b_1 \overset{\parallel}{\psi} (\overset{2}{\mathbf{v}} - \overset{1}{\mathbf{v}}),$$

gdzie pochodną zwyczajną prędkości zastąpiono pochodną cząstkową.

Podobnie jak w przypadku modelu kanalikowego dla określenia parametrów $\overset{\parallel}{\phi}$ i $\overset{\parallel}{\psi}$ w równaniu (5.8) potrzebna jest dodatkowa informacja; tutaj o średniej średnicy kulek tworzących model ośrodka.

Biorąc pod uwagę rezultaty otrzymane z analizy kanalikowego i kulkowego modelu ośrodka porowatego możemy przyjąć, że uwzględnienie wpływu historii na wielkość sił oddziaływania pomiędzy składnikami ośrodka w zakresie drgań harmonicznym sprowadza się do uwzględnienia obok sił dyfuzji dodatkowych sił o składowych proporcjonalnych do względnego przyspieszenia i względnej prędkości. Współczynniki towarzyszące takim siłom zależą od częstotliwości. Jest przy tym widoczne, że dla niskich często-

tliwości (tj. gdy $\omega \rightarrow 0$) $\overset{I}{\psi}(\omega)$ i $\overset{II}{\psi}(\omega)$ dążą do zera. Natomiast dla dostatecznie dużych wartości ω funkcje $\overset{I}{\phi}(\omega)$ i $\overset{II}{\phi}(\omega)$ zmierzają do zera.

Jako przykład ilustrujący wpływ częstotliwości na parametry propagacji fal harmonicznycch z uwzględnieniem efektu historii przeanalizujemy wyniki otrzymane dla piaskowca Berea wypełnionego wodą. W tym celu wykorzystamy liniowe związki fizyczne dla naprężeń w szkielecie i cieczy [4]

$$T_{ij}^s = 2N\varepsilon_{ij} + A\varepsilon + Q\Theta; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

(5.9)

$$T^f = Q\varepsilon + R\Theta; \quad \Theta = U_{i,i}, \quad \varepsilon = u_{i,i},$$

gdzie u_i i U_i oznaczają składowe przemieszczenia odpowiednio szkieletu i cieczy. Wartości współczynników materiałowych N , A , Q , R dla takiego

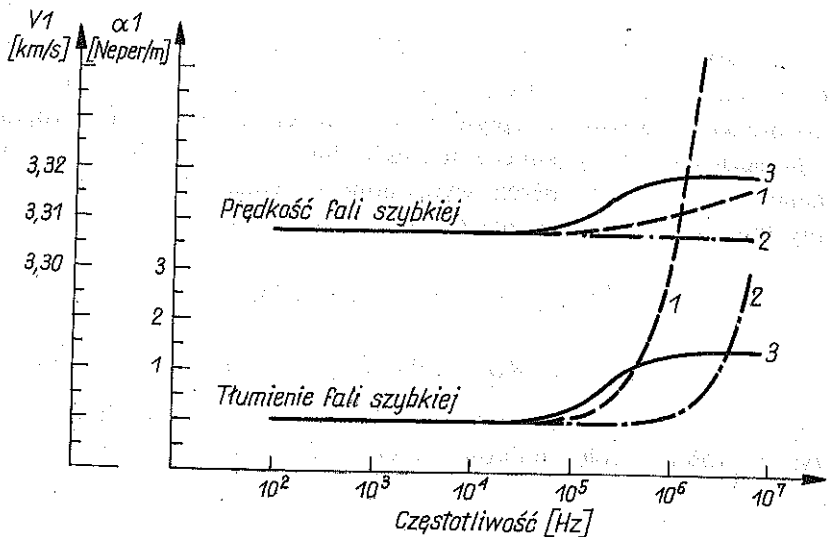
Tablica 1

f_v	λ	N	A	Q	R	b	ρ^s	ρ^f	Charakteryst. średnica	
									kanalu 2R	kulki 2a
		[N/m ²] $\times 10^{10}$				[MN/m ⁴]	[kg/cm ³] $\times 10^3$		[m] $\times 10^{-4}$	
0.187	0.138	0.7608	0.7663	0.1047	0.0331	281.3	2.615	1	0.3	2

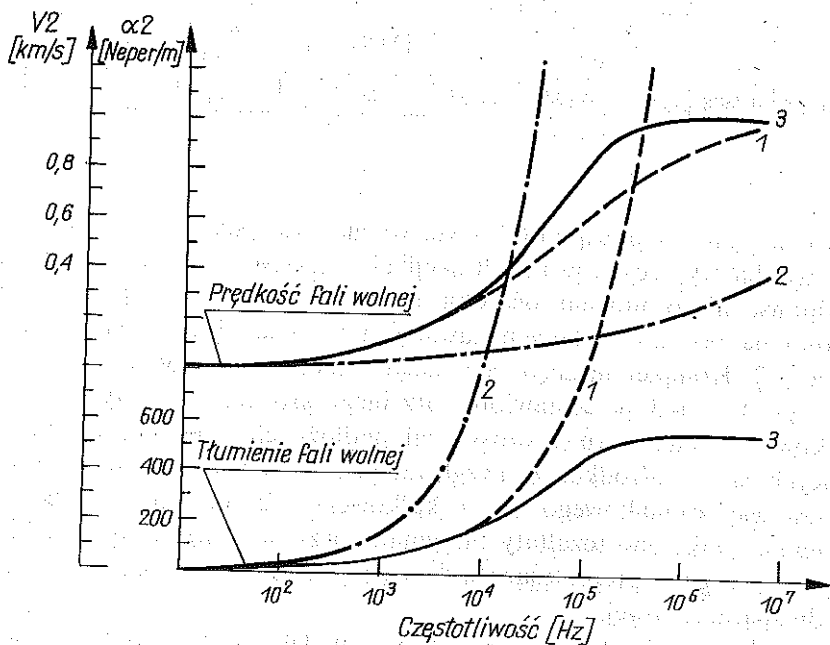
ośrodka przyjęto za pracę [18]. Wymiar charakterystyczny kanału i kulki, niezbędny dla wyspecyfikowania funkcji określających wpływ częstotliwości, dla odpowiedniego modelu ośrodka przyjęto za pracę [10], parametr λ określono na podstawie danych zawartych w pracy [18] i zależności podanej w [1]. Komplet niezbędnych danych zebrano w tablicy 1.

Na rys. 1, 2 i 3 przedstawiono przebiegi prędkości fazowych i współczynników tłumienia harmonicznycch fal podłużnych i fali poprzecznej propagujących się w ośrodku, z uwzględnieniem wpływu historii określonym na podstawie kanalikowego (1) i kulkowego (2) modelu ośrodka. Dla porównania naniesiono rezultaty otrzymane przy pominięciu wpływu historii ruchu względnego, reprezentujące wyłącznie efekt struktury porów w ramach teorii dwuparametrowej.

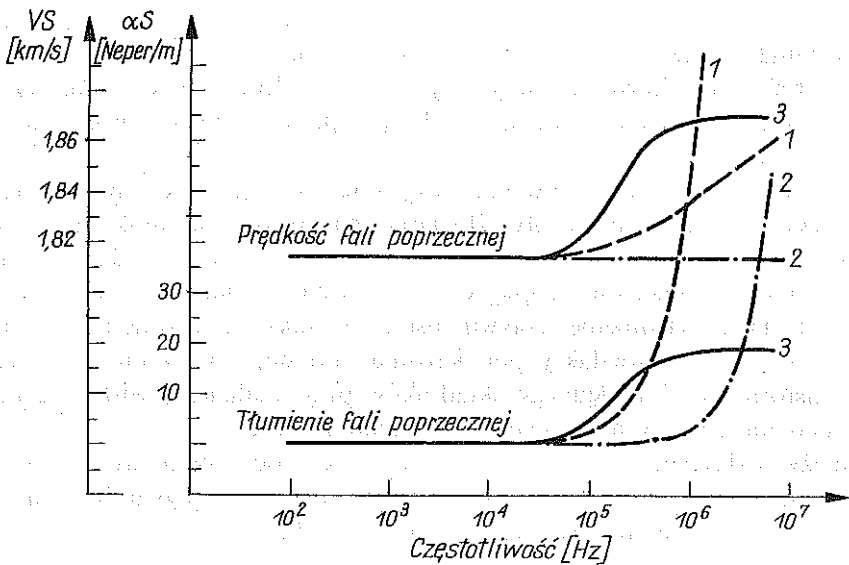
Jest widoczne, że parametry wszystkich fal zależą silnie od historii dla średnich i dużych częstotliwości. Tylko dla fali wolnej, uwzględnienie wpływu badanego efektu może mieć znaczenie w zakresie niższych często-



Rys. 1. Zależność parametrów propagacji fali szybkiej od częstotliwości. 1 — model kanalikowy; 2 — model kulkowy; 3 — brak efektu historii



Rys. 2. Zależność parametrów propagacji fali wodnej od częstotliwości. 1 — model kanalikowy; 2 — model kulkowy; 3 — brak efektu historii.



Rys. 3. Zależność parametrów propagacji fali poprzecznej od częstotliwości. 1 — model kanalikowy; 2 — model kulkowy; 3 — brak efektu historii.

liwości. Możemy również stwierdzić, że bardzo istotne znaczenie ma wybór modelu, za pomocą którego określono wielkości współczynników w sile uwzględniającej zależność sił oddziaływania od częstotliwości.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

W większości prac dotyczących opisu ośrodków porowatych nasyconych cieczą, przyjmuje się, że siły oddziaływania pomiędzy składnikami są liniowo zależne od chwilowych wartości względnej prędkości i względnego przyspieszenia. Składowe te reprezentują odpowiednio wpływ oddziaływań lepkich na interfacie oraz sprzężenie dynamiczne wynikające z istnienia tzw. masy dołączonej (cieczy) w ruchu względnym niemieszających się faz. Tak przyjmowane siły oddziaływania nie uwzględniają zależności od historii ruchu względnego składników.

W niniejszej pracy zaproponowano sposób uwzględnienia wpływu przeszłości względnego ruchu składników na wzajemne oddziaływania siłowe pomiędzy cieczą i porowatym szkieletem. Do jakościowej i ilościowej analizy takich efektów wykorzystano dwa modele ośrodka porowatego; kanalikowy i kulkowy.

Uwzględnienie efektu historii w przypadku drgań harmonicznym odpowiada wprowadzeniu do sił wzajemnego oddziaływania dodatkowych skła-

dowych proporcjonalnych do względnej prędkości i przyspieszenia, których współczynniki zależne są od częstotliwości drgań.

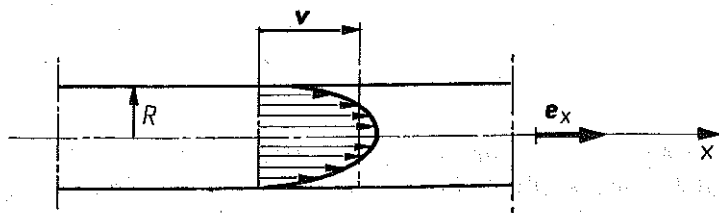
Podobne jakościowo rezultaty uzyskano na drodze homogenizacji [6] oraz poprzez uśrednianie równań mikroprzepływów cieczy przez ośrodek porowaty [13].

Na podstawie uzyskanych w niniejszej pracy wyników możemy stwierdzić, że współczynniki określające siły oddziaływania między składnikami ośrodka zależą w sposób istotny od częstotliwości w szerokim jej zakresie. Natomiast w przypadku parametrów propagacji wszystkich fal harmonicznym istotne znaczenie ma uwzględnienie wpływu historii w zakresie średnich i wysokich częstotliwości. Powyższe fakty potwierdzają potrzebę uwzględnienia wpływu efektu historii ruchu względnych składników przy analizie zjawisk dynamicznych nierozpuszczalnych mieszanin dwuskładnikowych.

Należy podkreślić, że z uwagi na silną zależność otrzymanych wyników od rodzaju modelu wykorzystywanego dla określenia wpływu historii, niezbędna jest odpowiednia weryfikacja doświadczalna.

DODATEK A. RÓWNIANIE RUCHU CIECZY LEPKIEJ W NIEODKSZTAŁCALNEJ RURZE

Liniowe równanie ruchu nieściślej cieczy lepkiej w nieodkształcalnej rurze (rys. 4) ma postać [3]



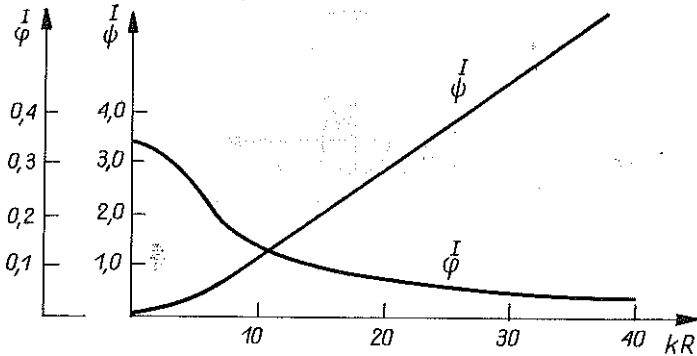
Rys. 4. Przepływ lepkiej cieczy w kanale

$$(A.1) \quad -\frac{\partial}{\partial x} p \mathbf{e}_x = \rho^f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau},$$

gdzie p i \mathbf{v} są średnimi w przekroju rury ciśnieniem i prędkością; ρ^f jest gęstością cieczy. Siła $\boldsymbol{\tau}$ reprezentuje całkowite oddziaływanie cieczy ze ściankami rury i w dowolnym, niestabilnym ruchu cieczy ma postać

$$(A.2) \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{8\mu}{R^2} \mathbf{v} + \frac{4\mu}{R^2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{v} W(t-\Theta) d\Theta,$$

gdzie μ jest lepkością dynamiczną cieczy a $W(t-\Theta)$ funkcją wagową. Pierwszy składnik siły oporu przepływu τ jest proporcjonalny do względnej, średniej prędkości przepływu i jest identyczny z siłą określoną prawem Darcy'ego-Weisbacha dla laminarnego przepływu w zagadnieniu ustalonym. Drugi wyraz reprezentuje wpływ wcześniejszego przebiegu zmian prędkości średniej na opór przepływu (efekt historii).



Rys. 5. Zależność współczynników $\overset{I}{\phi}$ i $\overset{I}{\psi}$ od parametru kR (częstotliwości)

W przypadku harmonicznycy oscylacji cieczy o częstotliwości ω siła τ ma postać

$$(A.3) \quad \tau = \frac{8\mu}{R^2} (1 + \overset{I}{\psi}) \mathbf{v} + \rho^f \overset{I}{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v},$$

gdzie

$$(A.4) \quad \overset{I}{\phi} = \frac{1}{\rho^f \omega} \text{Im}(z),$$

$$\overset{I}{\psi} = \frac{R^2}{8\mu} \text{Re}(z) - 1,$$

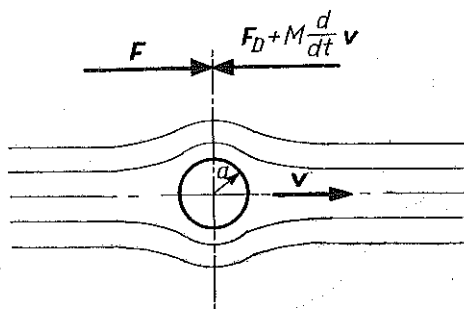
(A.5)

$$z = \frac{2\omega \rho^f J_1(j^{3/2} kR)}{j^{3/2} kR J_2(j^{3/2} kR)}, \quad k = \sqrt{\frac{\omega \rho^f}{\mu}}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

J_1 , J_2 są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju. Siły związane z bezwymiarowymi współczynnikami $\overset{I}{\phi}$ i $\overset{I}{\psi}$ reprezentują wpływ historii zmian prędkości na siłę oporu przepływu w zakresie harmonicznycy oscylacji cieczy w rurze. Na rys. 5 przedstawiono zależności współczynników $\overset{I}{\phi}$ i $\overset{I}{\psi}$ od argumentu (kR).

DODATEK B. RÓWNANIE RUCHU NIEODKSZTAŁCALNEJ KULKI W NIERUCHOMEJ, LEPKIEJ CIECZY

Ogólna postać równania ruchu nieodkształcalnej kulki (rys. 6) o masie M i prędkości v w nieruchomej, lepkiej cieczy ma postać



Rys. 6. Ruch kulki w cieczy

$$(B.1) \quad M \frac{d}{dt} v = F - F_D,$$

gdzie F jest siłą zewnętrzną a F_D całkowitą siłą oporu.

Dla dowolnego, nieustalonego w czasie ruchu kulki siła oporu wyznaczona z rozwiązania liniowego równania Naviera–Stokesa ma postać [19]

$$(B.2) \quad F_D = 6\pi a v + \frac{2}{3} \pi a^3 \rho^f \frac{d}{dt} v + 6a^2 \sqrt{\pi \rho^f \mu} \int_{-\infty}^t \frac{d}{ds} v \left| \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \right|,$$

gdzie μ , ρ^f oznaczają lepkość i gęstość cieczy.

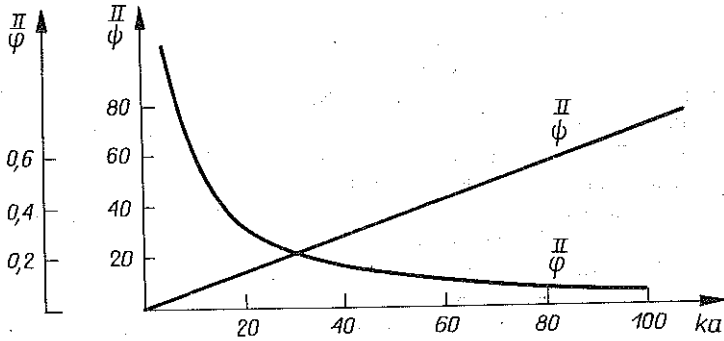
Pierwszy składnik siły F_D jest siłą oporu Stokesa, taką samą jak dla ruchu ustalonego. Drugi wyraz jest siłą związaną z tzw. efektem masy dołączonej. Ostatni wyraz we wzorze (B.2) reprezentuje wpływ wcześniejszych zmian prędkości kulki na siłę oddziaływania (efekt historii) i nazywa się go siłą Basseta.

W przypadku harmonicznym drgań kulki i częstotliwością ω siła oporu F_D redukuje się do postaci [19]

$$(B.3) \quad F_D = 6\pi \mu a v \left(1 + \frac{\pi}{\psi}\right) + \frac{2}{3} \pi a^3 \rho^f \left(1 + \frac{\pi}{\phi}\right) \frac{d}{dt} v,$$

gdzie

$$\frac{\pi}{\phi} = \frac{9}{\sqrt{2}} \frac{1}{ak}, \quad \frac{\pi}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} ak, \quad k = \sqrt{\frac{\omega \rho^f}{\mu}}.$$



Rys. 7. Zależność współczynników $\overset{\Pi}{\phi}$ i $\overset{\Pi}{\psi}$ od parametru ka (częstotliwości)

W równaniu (B.3) wpływ efektu historii na siłę oddziaływania dla harmonicznycy oscylacji kulki w cieczy reprezentują siły związane ze współczynnikami $\overset{\Pi}{\phi}$ i $\overset{\Pi}{\psi}$. Dla zobrazowania zmienności siły oporu na rys. 7 przedstawiono zależności $\overset{\Pi}{\phi}$ i $\overset{\Pi}{\psi}$ od bezwymiarowego współczynnika (ka).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. KUBIK, M. KACZMAREK, *Wpływ struktury porów na propagację fal harmonicznycy w ośrodku przepuszczalnym wypełnionym cieczą*, Rozpr. Inżyn., **36**, 3, 1988.
2. J. KUBIK, *A macroscopic description of geometrical pore structure of porous solids*, Int. J. Engng Sci., **24**, 6, 971—980, 1986.
3. И. А. ЧАРНЫЙ, *Неуставовившееся движение реальной жидкости в твудах*, Недра, Москва 1975.
4. M. A. BIOT, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I. Low-frequency range, II. Higher frequency range*, JASA, **28**, 2, 168—191, 1956.
5. J. BEAR, *Dynamics of fluids in porous media*, Amer. Elsevier Publ., 1972.
6. J. L. AURIAULT, L. BORNE, R. CHAMBON, *Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy*, JASA, **77**, 5, 1641—1650, 1985.
7. D. LHUILLIER, *Phenomenology of inertia effects in a dispersed solid-fluid mixture*, Int. J. Multiphase Flow, **11**, 4, 427—444, 1985.
8. J. BERRYMAN, *Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media*, JASA, **69**, 2, 416—424, 1981.
9. R. D. STOLL, *Acoustic waves in saturated sediments*, in: *Physics of Sound in Marine Sediments*, ed. L. D. HAMPTON, Plenum 1974.
10. P. R. OGUSHWITZ, *Applicability of the Biot theory. I. Low-porosity materials*, JASA, **77**, 2, 429—440, 1985.
11. J. M. HOVEM, G. D. INGRAM, *Viscous attenuation of sound in saturated sand*, JASA, **66**, 6, 1807—1812, 1979.
12. C. Z. ZWIKKER, C. W. KOSTEN, *Sound absorbing materials*, Elsevier, 1949.

13. R. J. S. BROWN, *Connection between formation factor for electrical resistivity and fluid solid coupling factor in Biots equations for acoustic waves in fluid-filled porous media*, *Geophysics*, **45**, 8, 1269—1275, 1980.
14. D. L. JOHNSON, T. J. PLONA, C. SCALA, *Tortuosity and acoustic slow waves*, *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 1840—1844, 1982.
15. A. BEDFORD, R. D. COSTLEY, M. STERN, *On the drag and virtual mass coefficients in Biots equations*, *JASA*, **76**, 6, 1804—1809, 1984.
16. J. KUBIK, *On internal coupling in dynamic equations of fluid-saturated porous solid*, *Int. J. Engng. Sci.*, **24**, 6, 981—989, 1986.
17. J. KUBIK, M. CIESZKO, *O oddziaływaniach wewnętrznych w ośrodku nasyconym cieczą*, *Rozpr. Inżyn.*, **35**, 1, 55—70, 1987.
18. C. H. YEW, P. N. JOGI, *Wave motion in fluid saturated rocks*, **60**, 1, 2—8, 1976.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ИСТОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ НА СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПАРАМЕТРЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе предложено дополнение вида функций, описывающих силы взаимодействия между компонентами пористой среды насыщенной жидкостью, эффектом их зависимости от истории относительного движения. На основе анализа задач обтекания шарика и течения жидкости через канал, обоснованы физические предпосылки, обосновывающие введение рассматриваемого эффекта к макроконтинуальному описанию пористой среды. Подробно рассмотрено влияние истории на параметры распространения гармонических волн для двух моделей среды (канальная и шариковая модели). На основе полученных численных результатов оценена область существенного влияния исследуемого эффекта на распространение гармонических волн.

SUMMARY

INFLUENCE OF THE HISTORY OF RELATIVE MOTION OF COMPONENTS ON THE INTERACTION FORCES AND WAVE PROPAGATION PARAMETERS IN A LIQUID-FILLED POROUS MEDIUM

The function describing the interaction forces between components of a porous, liquid-filled medium is generalized by taking into account the history of relative motion of the components. Flow about a sphere and liquid flow through a channel are discussed and used to justify the necessity of taking into account the effect considered in the macro-continuum description of porous media. Detailed analysis of the history effect on the

harmonic wave propagation is presented for two particular models of the medium mentioned before. The numerical results are used to estimate the effect in the case of harmonic wave propagation.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 11 listopada 1987 r.
