

NIELINIOWA ANALIZA BELEK ŻELBETOWYCH PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻEŃ IMPULSOWYCH

CZĘŚĆ I. DYSKRETYZACJA PROBLEMU DYNAMIKI BELKI ŻELBETOWEJ

GRZEGORZ BĄK i ADAM STOLARSKI (WARSZAWA)

Podano dyskretne sformułowanie różnicowe problemu dynamiki zarysowanej belki żelbetowej. Uwzględniono materiałowe efekty dynamiczne. Model odkształcania betonu ujmując efekt opóźnienia odkształceń plastycznych oraz osłabienie materiałowe z uwzględnieniem degradacji własności sprężystych. Stal zbrojeniową traktowano jako materiał sprężysto-lepko-idealnie plastyczny z uwzględnieniem opóźnienia plastycznego. Przedstawiono dyskretny model odkształcania zarysowanego przekroju żelbetowego oraz model dynamiczny belki. Podano algorytm wyznaczania przemieszczeń sprężysto-plastycznych. Wskazano na możliwości wykorzystania modelu w teoretycznym opisie wyczerpania nośności strefy ściskanej przekroju krytycznego belki.

1. WSTĘP

Wyznaczanie przemieszczeń belek żelbetowych klasycznymi metodami mechaniki budowli wymaga przyjęcia odpowiedniego prawa zmiany sztywności na zginanie przekrojów poprzecznych. Znane propozycje takich praw mają postać $B = B(M)$ wyrażającą wpływ momentu zginającego na sztywność przekroju poprzecznego [1, 2 i 3]. Zależności te odnoszą się do procesów obciążenia, które są wyłącznymi albo dominującymi w przypadku obciążeń statycznych o intensywności narastającej proporcjonalnie. Procesy odciążania nie występują wówczas w ogóle, albo występują na odcinkach o małym wyężeniu, w otoczeniu miejsc zerowych wykresu momentów zginających. Z tego też względu nie mają one istotnego znaczenia dla analizy teoretycznej.

Rozróżnianie w opisie teoretycznym procesów obciążania od odciążania jest konieczne w analizie przemieszczeń belek żelbetowych poddanych działaniu obciążeń dynamicznych. Brak jest jednak ugruntowanej propozycji prawa $B = B(M)$ dla procesów odciążania. Również znane propozycje tego prawa dla procesów obciążania należy uznać za niewystarczające, jeżeli rozpatrywać obciążenia impulsowe o dużej intensywności.

Tego typu obciążenia wymagają analizy przemieszczeń w zakresie niesprężystym. Istotne są wówczas efekty materiałowe związane z wrażliwością betonu i stali zbrojeniowej na historię i prędkość odkształcania dynamicznego. W celu wyznaczenia przemieszczeń belek żelbetowych naturalnym postępowaniem jest wykorzystanie metod numerycznych właściwych rozwiązywaniu zagadnień fizycznie nieliniowych. Istotą tych metod jest analiza przeprowadzana według odpowiedniej technicznej teorii konstrukcji, ale ze śledzeniem rozwoju odkształceń i naprężeń w każdej warstwie zdyskretyzowanego przekroju poprzecznego. Do grupy związków podstawowych problemu należą odpowiednie modele fizyczne materiałów (betonu i stali) definiujące ich dynamiczne zachowanie w procesach obciążania i odciążania. Dyskretyzacja przekroju poprzecznego w naturalny sposób umożliwia uwzględnienie heterogeniczności przekrojów żelbetowych. Wyróżnia się niezarysowane i zarysowane warstwy betonowe oraz warstwy stalowe. Wzajemną współpracę tych warstw definiuje odpowiednia reguła odkształceniowa.

Znane w literaturze rozwiązania dla konstrukcji żelbetowych uzyskano przede wszystkim metodą elementów skończonych. Rozwiązania te dotyczą zarówno zagadnień statycznych, np. [4, 5 i 6], jak i zagadnień dynamicznych, np. [7, 8, 9 i 10]. W pracach dotyczących dynamiki w różnym stopniu uwzględniane są własności dynamiczne betonu i stali. Stosunkowo najpełniej własności dynamiczne obu materiałów zostały uwzględnione w pracy [7]. Nie rozważano tam jednak typowych zadań dynamiki konstrukcji żelbetowych. Przedmiotem analiz teoretycznych i badań doświadczalnych były problemy propagacji obszarów zniszczeń w żelbecie na skutek uderzeń masami skupionymi. Analiza teoretyczna belki żelbetowej obciążonej dynamicznie siłą skupioną jest przeprowadzana w pracy [8]. Wykorzystano program obliczeniowy ADINA, w którym niesprężyste własności betonu są opisane modelem odkształcenia właściwym dla zagadnień statycznych. Uwzględniono natomiast w uproszczony sposób lepkoplastyczne własności stali zbrojeniowej. Dynamicznie obciążone żelbetowe belki i płyty kwadratowe analizowano w pracy [9], wykorzystując elementy dynamicznego modelu odkształcania betonu według [7] oraz statyczną, biliniową idealizację $\sigma = \sigma(\epsilon)$ dla stali. W pracy [10] analizowano belki wspornikowe i obustronnie utwierdzone, nie uwzględniając dynamicznych efektów materiałowych w betonie i stali.

W odniesieniu do omawianych zagadnień efektywne rozwiązania można uzyskać metodą różnic skończonych. Metodę różnicową dla zagadnień dynamicznych jednorodnych konstrukcji sprężysto-plastycznych przedstawiono w pracy [11]. Ilustracją zastosowania tej metody mogą być szczegółowe rozwiązania belek i płyt sprężysto-plastycznych przedstawione w pracy [12] oraz rozwiązanie dla belki żelbetowej [13]. W pracy [13] nie uwzględniono jednak własności dynamicznych betonu i stali.

W niniejszej pracy przedstawiono dyskretny model belki żelbetowej,

właściwy metodzie różnicowej konsekwentnej dla przestrzeni i czasu. W modelu uwzględnia się zasadnicze własności dynamiczne betonu i stali zbrojeniowej. Dla betonu własnościami tymi są wzrost wytrzymałości na ściskanie oraz osłabienie materiałowe z postępującą degradacją sprężystą [14]; dla stali zbrojeniowej — efekt wzrostu początkowej plastyczności oraz lepkość w zakresie plastycznym [15]. Zaproponowano model obliczeniowy zarysowanego przekroju żelbetowego, odkształcającego się w zakresie nieśprężystym. Przyjęty model dyskretny belki jest podstawą algorytmu wyznaczania teoretycznej prognozy maksymalnych przemieszczeń w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych oraz oszacowania poziomu przemieszczeń trwałych belki, pod działaniem obciążeń impulsowych o dużej intensywności.

Wykorzystanie przedstawionego modelu różnicowego umożliwia również teoretyczną analizę osiągnięcia stanu nośności dynamicznej belek żelbetowych na skutek wyczerpania zdolności odkształceniowych betonu w strefie ściskanej przekrojów krytycznych elementu. Wyniki szczegółowej analizy numerycznej oraz porównanie z wynikami doświadczalnymi zaczerpniętymi z literatury [8] przedstawiono w drugiej części pracy.

2. MODELE DYNAMICZNEGO ODKSZTAŁCANIA MATERIAŁÓW

2.1. Beton

W niniejszej pracy wykorzystano niestandardowy model dynamicznego odkształcania betonu dla jednoosiowego ściskania zaproponowany w pracy [14]. Na rys. 1 przedstawiono przyjętą idealizację $\sigma = \sigma(\epsilon)$ dla betonu jako materiału sprężysto-plastycznego z liniowym osłabieniem materiałowym.

Sprężysta faza odkształcania jest ograniczona czasem t_d osiągnięcia wytrzymałości dynamicznej R_b^d . Wielkości te wyznacza się na podstawie całkowitego kryterium wytrzymałości dynamicznej betonu przedstawionego w pracy [14]. Kryterium to dla dowolnego procesu naprężania $\sigma_b(t)$ ma postać

$$(2.1) \quad \int_0^{t_d} \left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b^d} \right]^{\alpha_b} dt = t_{b0}.$$

Przedstawiony model jest określony przez następujące parametry: 1) statyczne wartości wytrzymałości i moduł odkształcania betonu R_b^s , E_b ; 2) stałe materiałowe α_b i t_{b0} , których wartości, zgodnie z [14], proponuje się przyjmować niezależnie od klasy betonu

$$(2.2) \quad \alpha_b = 17,75, \quad t_{b0} = 0,180 \text{ s};$$

3) wytrzymałość dynamiczną R_b^d osiągniętą w czasie t_d

$$(2.3) \quad R_b^d = \sigma_b(t_d) \geq R_b^g;$$

4) odkształcenia ε_R i ε_u , które mogą przyjmować wartości

$$(2.4) \quad \varepsilon_R = 2^\circ/_{\infty}, \quad \varepsilon_u = \text{od } 6 \text{ do } 12^\circ/_{\infty}.$$

Przedstawioną na rys. 1 idealizację można opisać następująco:
dla procesów obciążania $\dot{\varepsilon} > 0$

$$(2.5) \quad \sigma_b = \left\{ \begin{array}{l} E_b \varepsilon, \\ R_b^d, \quad \varepsilon_e < \varepsilon \leq \varepsilon_R, \\ R_b^d \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_R}{\varepsilon_u - \varepsilon_R} \right), \quad \varepsilon_R < \varepsilon \leq \varepsilon_u, \\ 0, \quad \varepsilon > \varepsilon_u, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{jeżeli } t \leq t_d, \\ \\ \\ \text{jeżeli } t > t_d; \end{array} \right.$$

dla procesów odciążania $\dot{\varepsilon} < 0$

$$(2.6) \quad \sigma_b = \left\{ \begin{array}{l} E_b \varepsilon, \\ R_b^d - (\varepsilon^m - \varepsilon) E_b, \quad \varepsilon_e < \varepsilon^m \leq \varepsilon_R, \\ R_b^d \left(1 - \frac{\varepsilon^m - \varepsilon_R}{\varepsilon_u - \varepsilon_R} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon^m - \varepsilon}{\varepsilon^m - \varepsilon_f} \right), \quad \varepsilon_R < \varepsilon^m \leq \varepsilon_u \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{jeżeli } t_m \leq t_d, \\ \\ \text{jeżeli } t_m > t_d, \end{array} \right.$$

gdzie $\varepsilon^m = \varepsilon(t_m)$ oznacza odkształcenie osiągnięte w chwili $t = t_m$ początku odciążania oraz $\varepsilon_f = \varepsilon_R - \varepsilon_e$, $\varepsilon_e = R_b^d/E_b$.

Dla zakresu osłabienia materiałowego uwzględniono w uproszczony sposób efekt degradacji sprężystej, wprowadzając liniowe prawo odciążania i ponownego obciążania (2.6)₃. Prawo to uwzględnia zmniejszanie modułu odkształcenia w miarę zaawansowania procesu odkształcenia:

$$(2.7) \quad E_b^m = \frac{\sigma_b^m}{\varepsilon^m - \varepsilon_f}, \quad \varepsilon_R < \varepsilon^m \leq \varepsilon_u$$

i decyduje głównie o opisie drgań belki po wystąpieniu maksymalnych przemieszczeń.

W przyjętym modelu fizycznym betonu zaniedbano jego zdolności odkształceniowe na rozciąganie. Nie ma to istotnego wpływu na przemieszczenia belek żelbetowych w zaawansowanych stadiach odkształceń niesprężystych [13].

2.2. Stal zbrojeniowa

Stal zbrojeniowa jest stałą miękką, wrażliwą na historię naprężania w zakresie sprężystym oraz na prędkość odkształceń plastycznych. Takie dynamiczne efekty materiałowe mogą być opisane związkami konstytutywnymi dla materiału sprężysto/lepkko-idealnie plastycznego, zmodyfikowanymi przez

uwzględnienie zjawiska opóźnienia plastycznego [15]. Modyfikacja ta polega na całkowaniu równań konstytutywnych sprężysto/lepkoplastyczności P. PERZYŃNY [16] z warunkiem początkowym jako dynamiczną granicą plastyczności, wyznaczoną na podstawie kryterium dynamicznego uplastycznienia J. D. CAMPBELLÁ [17].

Równanie konstytutywne sprężysto/lepkoplastyczności dla analizowanego jednoosiowego stanu naprężenia jest następujące:

$$(2.8) \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle,$$

gdzie F oznacza statyczną funkcję uplastycznienia dla materiału nie wykazującego wzmocnienia:

$$(2.9) \quad F = \frac{\sigma(t)}{\sigma_0} - 1.$$

W równaniach (2.8) i (2.9) E , σ_0 i γ oznaczają odpowiednio moduł odkształcenia, granicę plastyczności i współczynnik lepkości stali.

Symbol $\langle \Phi(F) \rangle$, dla zmodyfikowanego modelu dynamicznego odkształcenia stali [15], jest zdefiniowany następująco:

$$(2.10) \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \leq t_d, \\ \Phi(F), & \text{jeżeli } F > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } F \leq 0 \end{cases} \quad \text{dla } t > t_d.$$

Przyjęto nieliniową funkcję $\Phi(F)$ w postaci prawa potęgowego

$$(2.11) \quad \Phi(F) = F^\alpha.$$

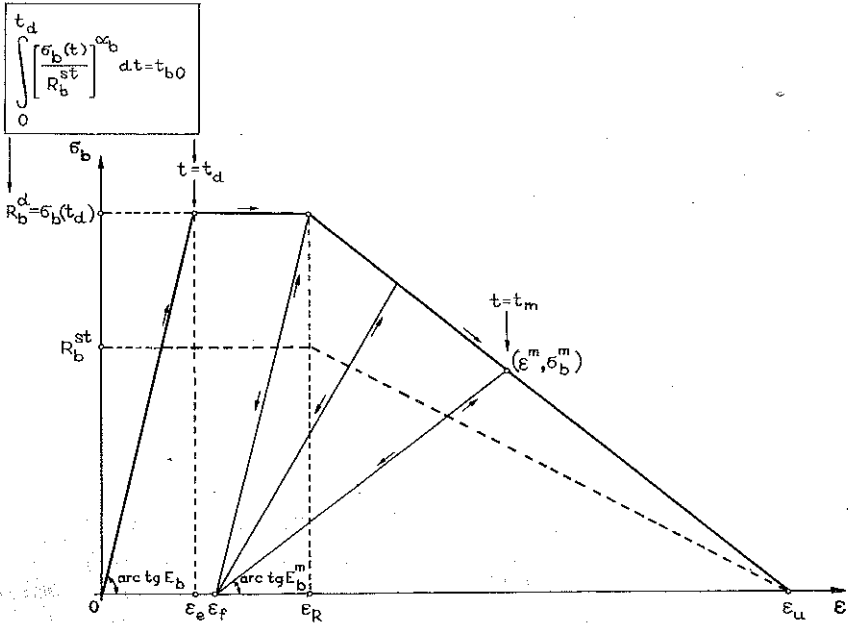
Czas opóźnienia plastycznego t_d można określić na podstawie kryterium dynamicznego uplastycznienia J. D. CAMPBELLÁ [17] w postaci

$$(2.12) \quad \int_0^{t_d} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} \right]^\alpha dt = t_0.$$

Początkowa dynamiczna granica plastyczności wyznaczona na podstawie kryterium (2.12) wynosi

$$(2.13) \quad \sigma_0^\alpha = \sigma(t_d) \geq \sigma_0.$$

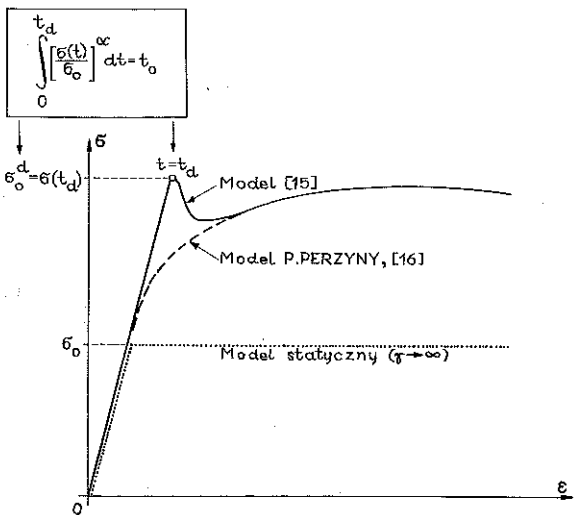
Wielkości α i t_0 są stałymi materiałowymi, które dla stali budowlanych St3SY i 18G2 stosowanych w Polsce można przyjmować na podstawie badań J. KLEPACZKI [18] następująco:



Rys. 1

(2.14)
$$\begin{cases} \text{St3SY:} & \alpha = 14,6, & t_0 = 0,641 \text{ s,} \\ \text{18G2:} & \alpha = 16,8, & t_0 = 2,818 \text{ s.} \end{cases}$$

Na rys. 2 przedstawiono schematycznie zależność $\sigma = \sigma(\epsilon)$ dla przyjętego modelu dynamicznego odkształcania. Charakterystyczną cechą tego modelu



Rys. 2

jest możliwość opisu zjawiska mięknięcia plastycznego występującego bezpośrednio po dynamicznym uplastycznieniu, co potwierdzają doświadczenia dla stali miękkiej. Z analiz teoretycznych przeprowadzonych w [15] wynika, że zjawisko to może być uwarunkowane intensywnością procesu wymuszania odkształceń oraz własnościami lepki materialu i nie zawsze występuje, szczególnie dla bardzo małych ($\dot{\epsilon} \approx 0,006 \text{ s}^{-1}$) i bardzo dużych ($\dot{\epsilon} \approx 500 \text{ s}^{-1}$) prędkości odkształceń. Zmodyfikowany model odkształcenia jest ogólny i może być odpowiednio redukowany do modelu sprężysto/lepko-idealnie plastycznego — przez pominięcie zjawiska opóźnienia plastycznego lub modelu sprężysto-idealnie plastycznego — przez pominięcie dodatkowo lepkości.

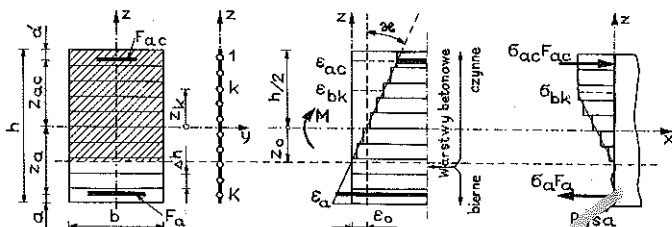
3. MODEL OBLICZENIOWY BELKI

3.1. Dyskretyzacja przekroju poprzecznego

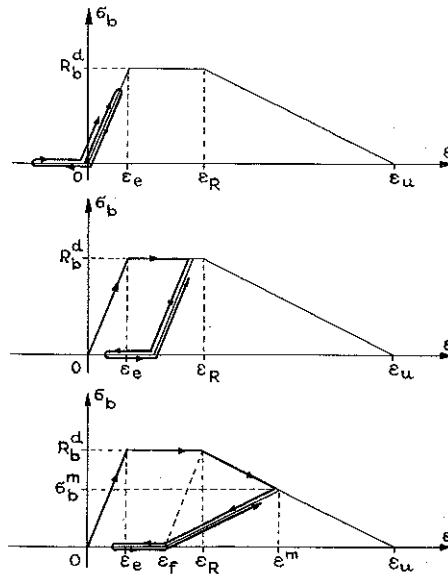
Model obliczeniowy przekroju poprzecznego wynika z jego dyskretyzacji. Polega ona na podziale przekroju na warstwy betonowe o grubości Δh oraz na wyróżnieniu dwu warstw stalowych o przekroju F_a i F_{ac} (rys. 3).

Znakoczułość betonu (różne zdolności odkształceniowe na ściskanie i rozciąganie) powoduje, że jest konieczne rozróżnienie warstw betonowych czynnych i biernych. Całkowite zaniedbanie zdolności odkształceniowych betonu na rozciąganie w przyjętym modelu fizycznym oznacza, że betonowymi warstwami czynnymi są tylko warstwy przenoszące naprężenia ściskające. Naprężenia te przyjmuje się jako stałe na grubości warstwy Δh . Betonową warstwę bierną w procesie odkształcania jest warstwa położona na wysokości rysy otwartej. Warstwa bierna może być ponownie warstwą czynną po zamknięciu rysy i odkształcać się przy ściskaniu. Możliwe sytuacje odkształceniowe tworzenia się warstw biernych i powtórnie czynnych w procesach odciążania i ponownego obciążania przedstawiono na rys. 4.

Funkcjonowanie modelu obliczeniowego przekroju jest określone idealizacjami odkształceniowymi betonu i stali oraz założeniem Bernoulliego o płaskim przekroju. Założenie to ma tylko zastosowanie do warstw betonowych czynnych w procesie odkształcania oraz do warstw stalowych.



Rys. 3



Rys. 4.

Wyraża ono zasadę współpracy wszystkich warstw aktywnych przekroju poprzecznego. Warstwy betonowe bierne nie współpracują zarówno wzajemnie ze sobą, jak również z warstwami stalowymi i betonowymi czynnymi. Jest to konsekwencja zaniedbania zdolności betonu do przenoszenia naprężeń rozciągających. Zgodnie z teorią żelbetu, początkowa reakcja naprężeniowa przekroju jest określona jako tzw. faza IIA. W procesie dynamicznego odkształcania w stanie naprężenia pojawiają się zmiany ewolucyjne w zależności od dróg obciążania i odciążania. W ogólności w przekroju pojawiają się zarysowania w strefach uprzednio ściskanych, co odpowiada zmianie betonowych warstw czynnych na warstwy bierne. Przekrój poprzeczny może być wówczas obustronnie zarysowany, przy czym rysy dolna i górna mogą łączyć się ze sobą. *

Rozkład odkształceń w poszczególnych warstwach aktywnych przekroju poprzecznego w każdej chwili czasowej $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ jest określony wzorem

$$(3.1) \quad \varepsilon_r^n = \varepsilon_0^n + z_r \kappa^n, \quad z_r = \begin{cases} z_k, & k = 1, 2, \dots, K, \\ z_a, z_{ac}. \end{cases}$$

Dla znanej krzywizny κ^n , odkształcenia podłużne osi środkowej ε_0^n , określającą jednoznacznie położenie osi obojętnej przekroju oraz wartość momentu zginającego M^n , wyznacza się z równań równowagi wewnętrznej przekroju:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{N}^n &= \sum_{k=1}^K \sigma_{bk}^n A_k^n + \sigma_a^n F_a + \sigma_{ac}^n F_{ac} = 0, \\ M^n &= \sum_{k=1}^K \sigma_{bk}^n A_k^n z_k + \sigma_a^n F_a z_a + \sigma_{ac}^n F_{ac} z_{ac}, \end{aligned}$$

gdzie A_k oznacza pole powierzchni k -tej warstwy betonowej przekroju poprzecznego, zmienne w czasie ze względu na rodzaj warstwy:

$$(3.3) \quad A_k^n = \begin{cases} b\Delta h & \text{dla warstwy czynnej,} \\ 0 & \text{dla warstwy biernej,} \end{cases}$$

Przyjęty model obliczeniowy zginanego przekroju żelbetowego może być stosowany również do analizy teoretycznej wyczerpania nośności strefy ściskanej betonu. Należy podkreślić, że można rozważać różne mechanizmy wyczerpania nośności tej strefy.

Jedną z propozycji może wynikać z konsekwentnego stosowania modelu odkształcania betonu, stanowiącego podstawę rozważań w niniejszej pracy. Utrata nośności ściskanej warstwy betonowej postępuje zgodnie z liniowym prawem osłabienia materiałowego (2.5)₃. Sukcesywne wyłączenie się kolejnych warstw strefy ściskanej betonu po osiągnięciu odkształceń ε_u prowadzi do kontynuualnej degradacji nośności przekroju na zginanie, jeżeli tylko rozpatrywać odpowiednio cienkie warstwy Δh . W tym samym czasie zwiększa się wpływ stali ściskanej F_{ac} na nośność przekroju, co częściowo rekompensuje ubytek nośności strefy ściskanej betonu. Tego typu mechanizm kontynuualnego wyczerpania nośności strefy ściskanej nie jest stwierdzany w doświadczeniach dla belek żelbetowych.

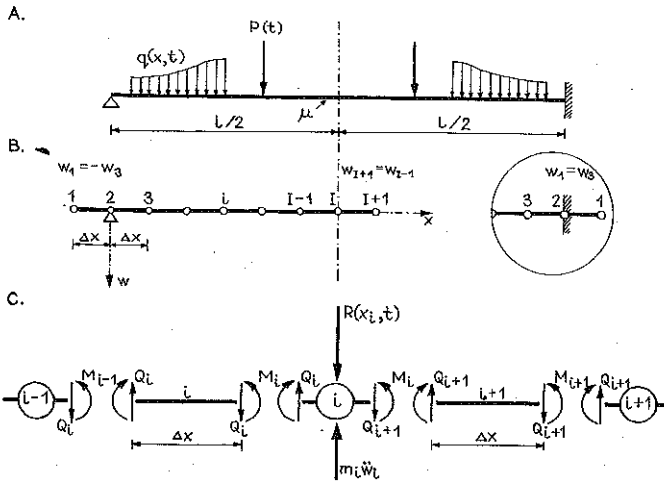
Inna propozycja mechanizmu wyczerpania nośności strefy ściskanej opiera się na wykorzystaniu kryterium odkształceniowego. Mianowicie, można założyć, że po osiągnięciu odkształceń granicznych ε_f ($\varepsilon_R < \varepsilon_f < \varepsilon_u$) w skrajnej warstwie ściskanej następuje kruche zniszczenie całej strefy ściskanej betonu. Zjawiska takie są stwierdzane w doświadczeniach, szczególnie w przypadku belek pojedynczo zbrojonych albo o małym przekroju stali ściskanej F_{ac} oraz belek bez zagęszczonego zbrojenia poprzecznego.

Istnieje znacząca literatura na temat odkształceń granicznych ε_f dla zginania pod działaniem obciążeń statycznych. Problem wyczerpania nośności strefy ściskanej, możliwy do analizy w ramach omawianej metody, sygnalizujemy w niniejszej pracy ze względu na dyskusję rozwiązań numerycznych, która jest przedmiotem drugiej części pracy.

3.2. Równania ruchu belki w zapisie różnicowym

Rozpatrujemy belki żelbetowe o masie jednostkowej μ , poddane działaniu dynamicznego obciążenia ciągłego $q(x, t)$ lub skupionego $P(t)$ (rys. 5A).

Analizę dynamiczną przeprowadzimy w ramach technicznej teorii belek zginanych. Uwzględniamy tylko siły bezwładności poprzecznej. Nie analizujemy propagowania się rys ukośnych wywołanych działaniem sił poprzecznych i ich wpływu na wartości przemieszczeń. Przemieszczenia w belkach wyznaczamy opierając się na związku geometrycznym dla małych przemieszczeń



Rys. 5

$$(3.4) \quad \kappa(x, t) = -\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2},$$

w którym $\kappa(x, t)$ oznacza krzywiznę w przekroju zarysowanym.

Układ równań różniczkowych równowagi dynamicznej belki ma postać

$$(3.5) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p(x, t), \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= Q. \end{aligned}$$

Wprowadzamy podział osi podłużnej belki węzłami x_i , $i = 2, I$ odległymi od siebie o stały krok Δx (rys. 5B). Zastępując pochodne względem zmiennej przestrzennej x przez odpowiednie ilorazy różnicowe, otrzymujemy w każdej chwili czasowej $t^n = t^{n-1} + \Delta t$:

związek geometryczny

$$(3.6) \quad \kappa(x_i, t^n) = \kappa_i^n = -\frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

równania równowagi dynamicznej belki

$$(3.7) \quad \begin{aligned} -Q_i + Q_{i+1} + R(x_i, t^n) - m_i \ddot{w}_i^n &= 0, \\ -M_i + M_{i-1} + Q_i \Delta x &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $m_i = \mu \Delta x$ oznacza masę skupioną i -tego węzła, $R(x_i, t^n)$ obciążenie dynamiczne i -tego węzła:

$$R(x_i, t^n) = \begin{cases} q(x_i, t^n) \Delta x & \text{dla obciążenia ciągłego,} \\ P(t^n) \delta(x_i - x_\alpha) & \text{dla obciążenia siłami skupionymi} \\ & \text{działającymi w węzłach o współrzędnych } x_\alpha, \end{cases}$$

oraz

$$\delta(x_i - x_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x_i = x_\alpha, \\ 0 & \text{dla } x_i \neq x_\alpha. \end{cases}$$

Zastosowanie w równaniach równowagi (3.7) aproksymacji różnicowej pochodnych przestrzennych jednostronnymi ilorazami różnicowymi umożliwia interpretację tych równań jako równań równowagi modelu dyskretnego belki o skończonej liczbie stopni swobody, (rys. 5C). Równanie (3.7)₁ wyraża sumę rzutów sił działających na masę skupioną w węzle i , a równanie (3.7)₂ — sumę momentów napisaną dla i -tego odcinka belki.

W węzłach modelu przeprowadza się pełną analizę procesu dynamicznego odkształcania przekrojów poprzecznych, określając tym samym przestrzenną i czasową zmienność sztywności na zginanie.

Warunki brzegowe i warunki symetrii wyraża się w sposób typowy dla metody różnicowej przez wprowadzenie węzłów fikcyjnych, odpowiednio $i = 1$ oraz $i = I + 1$ (rys. 5B).

4. METODA ROZWIĄZANIA

4.1. Algorytm wyznaczania przemieszczeń

Zakładamy, że w chwili t^n są znane przemieszczenia i prędkości przemieszczeń w węzłach x_i podziału osi podłużnej belki. Stan naprężeń w chwili t^n wyznaczamy sposobem przyrostowym opierając się na znanych wartościach odkształceń i naprężeń w chwili poprzedniej t^{n-1} . Na tej podstawie określamy siły wewnętrzne i przyspieszenia, które umożliwiają wyznaczenie przemieszczeń i prędkości przemieszczeń w chwili następnej $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Szczegółowy algorytm przebiega zgodnie z niżej podanym tokiem postępowania.

1) Dla znanych przemieszczeń określamy krzywizny κ_i^n osi podłużnej belki według wzoru (3.6) w każdym węzle x_i podziału belki.

2) Wyznaczamy położenie osi obojętnej w węzłowych przekrojach poprzecznych stosując iteracyjny proces rozwiązań równania równowagi (3.2)₁. Nie poszukujemy bezpośrednio wielkości z_0 określającej położenie tej osi (rys. 3); jako niewiadomą w równaniu (3.2)₁ przyjmujemy odkształcenie e_{0i}^n osi środkowej belki. W każdej iteracji procedura numeryczna obejmuje co następuje:

2.1) Wyznaczenie odkształceń $\varepsilon_{ri}^n = (\varepsilon_b, \varepsilon_a, \varepsilon_{ac})_i^n$ w każdej warstwie przekroju poprzecznego na podstawie założenia płaskich przekrojów (3.1).

2.2) Wyznaczenie przyrostów odkształceń w warstwach $\Delta\varepsilon_{ri}^n = \varepsilon_{ri}^n - \varepsilon_{ri}^{n-1}$ dla znanych odkształceń ε_{ri}^{n-1} z poprzedniego kroku czasowego;

2.3) Wyznaczenie naprężeń $\sigma_{ri}^n = (\sigma_b, \sigma_a, \sigma_{ac})_i^n$ dla znanych przyrostów odkształceń $\Delta\varepsilon_{ri}^n$ oraz naprężeń σ_{ri}^{n-1} zgodnie z przyjętymi modelami dynamicznego odkształcania betonu i stali,

2.4) Sprawdzenie kryterium dokładności rozwiązania równania (3.2)₁ w procesie iteracyjnym: zmiana ε_{0i}^n i kolejna iteracja albo koniec iteracji.

3) Na podstawie definicji (3.2)₂ wyznaczamy momenty zginające M_i^n w węzłach x_i podziału osi podłużnej.

4) Z równań równowagi (3.7)₂ wyznaczamy siły poprzeczne Q_i^n w węzłach x_i .

5) Wykorzystując (3.7)₁ wyznaczamy przyspieszenia \ddot{w}_i^n w węzłach osi belki.

6) Na podstawie przyjętej procedury numerycznego całkowania równań ruchu określamy poszukiwane przemieszczenia w_i^{n+1} i prędkości przemieszczeń \dot{w}_i^{n+1} w węzłach x_i podziału osi podłużnej belki w następnej chwili czasowej t^{n+1} .

Przytoczoną procedurę powtarza się dla następnych chwil czasowych odległych od siebie o stały krok Δt . Opracowany algorytm jest podstawą programu obliczeniowego wyznaczania dynamicznych przemieszczeń zarysowanej belki żelbetowej. Umożliwia śledzenie ewolucji dynamicznej reakcji naprężeniowej przekrojów poprzecznych analizowanych belek. Zasadniczymi elementami tego algorytmu są: 1) wyznaczenie położenia osi obojętnej przekroju, 2) wyznaczenie naprężeń w warstwach betonowych i stalowych oraz 3) procedura numerycznego całkowania równań ruchu.

4.2. Wyznaczenie położenia osi obojętnej przekroju

Równanie równowagi sił podłużnych (3.2)₁ umożliwia określenie położenia osi obojętnej przekroju. Położenie osi obojętnej (lub ogólnej — osi chwilowego obrotu przekroju odkształconego) jest określone odległością z_0 od osi środkowej (rys. 3). Wielkość ta jest funkcją krzywizny oraz odkształcenia podłużnego osi środkowej, $z_0 = z_0(\varkappa, \varepsilon_0)$, i teoretycznie może przyjmować wartości z przedziału $(-\infty, \infty)$. Wobec tego wygodne jest bezpośrednie poszukiwanie odkształcenia osi środkowej ε_0 , co wymaga rozwiązania nie-

liniowego równania (3.2)₁. Rozwiązanie można otrzymać metodą Newtona uzyskując następujący wynik po j -tej iteracji:

$$(4.1) \quad \varepsilon_{0(j)}^n = \varepsilon_{0(j-1)}^n - \left(\frac{\partial N_{(j-1)}^n}{\partial \varepsilon_{0(j-1)}^n} \right)^{-1} N_{(j-1)}^n,$$

z obraną dokładnością $\Delta \varepsilon_0$:

$$(4.2) \quad \left| \frac{\varepsilon_{0(j)}^n - \varepsilon_{0(j-1)}^n}{\varepsilon_{0(j-1)}^n} \right| \leq \Delta \varepsilon_0.$$

Rozwiązanie równania (3.2)₁ w każdym kroku czasowym wyznaczono przyjmując jako zerowe przybliżenie pierwiastka ε_0^n wynik rozwiązania z poprzedniej chwili czasowej $\varepsilon_{0(j=0)}^n = \varepsilon_0^{n-1}$. Przedstawiona procedura umożliwia efektywne wyznaczenie położenia osi obojętnej (osi chwilowego obrotu). Ze względu na rozważanie pełnego programu obciążania niesprężystego oraz odciażania oś chwilowego obrotu może znajdować się okresowo poza przekrojem.

4.3. Wyznaczanie naprężeń w warstwach betonowych i stalowych

Naprężenia w warstwach betonowych i stalowych dla danych odkształceń według (3.1) są wyznaczane na podstawie związków fizykalnych betonu i stali. Sposób określania naprężeń w warstwach betonowych w procesach obciążania (2.5) i odciażania (2.6) nie wymaga komentarza. Natomiast wyznaczenie naprężeń w warstwach stalowych dla przyjętego modelu dynamicznego odkształcania stali wymaga rozwiązania równania (2.8). Dla znanego w każdej chwili czasowej $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ procesu wymuszania prędkości odkształcania:

$$(4.3) \quad \dot{\varepsilon}(t^n) = \dot{\varepsilon}^n \approx \frac{\Delta \varepsilon^n}{\Delta t} = \frac{\varepsilon^n - \varepsilon^{n-1}}{\Delta t}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_a, \varepsilon_{ac}),$$

związek (2.8) jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu ze względu na naprężenie $\sigma(t^n) = \sigma^n$, $\sigma = (\sigma_a, \sigma_{ac})$. Rozwiązanie tego równania przeprowadzono drogą całkowania z warunkiem początkowym (2.13) w chwili $t = t_d$ spełnienia kryterium (2.12). Całkowanie równania (2.8) przy wykorzystaniu nieliniowej funkcji (2.11) (dla $\delta \neq 1$) wymaga użycia metod numerycznych. W pracy zastosowano niejawnny schemat różnicowy Eulera. Powstałe w wyniku wykorzystania tego schematu nieliniowe — ze względu na σ^n — równanie algebraiczne

$$(4.4) \quad \varphi^n = \frac{\sigma^n - \sigma^{n-1}}{\Delta t} - E \left[\frac{\Delta \varepsilon^n}{\Delta t} - \gamma \left\langle \left(\frac{\sigma^n}{\sigma_0} - 1 \right)^\delta \right\rangle \right] = 0,$$

rozwiązywano metodą Newtona, uzyskując rozwiązanie po j -tej iteracji

$$(4.5) \quad \sigma_{(j)}^n = \sigma_{(j-1)}^n - \left(\frac{\partial \varphi_{(j-1)}^n}{\partial \sigma_{(j-1)}^n} \right)^{-1} \varphi_{(j-1)}^n,$$

z założoną dokładnością $\Delta\sigma$:

$$(4.6) \quad \left| \frac{\sigma_{(j)}^n - \sigma_{(j-1)}^n}{\sigma_{(j-1)}^n} \right| \leq \Delta\sigma.$$

Rozwiązanie numeryczne nieliniowego równania (4.4) metodą Newtona jest dobrze uwarunkowane: istnieje tylko jeden rzeczywisty pierwiastek $\sigma^n > 0$. Rozwiązanie równania (4.4) w każdym kroku czasowym wyznaczono przyjmując jako przybliżenie zerowe poszukiwanego pierwiastka σ^n wynik rozwiązania z poprzedniej chwili czasowej $\sigma_{(j=0)}^n = \sigma^{n-1}$. Symbol $\langle \cdot \rangle$ użyty w równaniu (4.4), zdefiniowany zgodnie z (2.10), wyczerpuje możliwe sytuacje obciążania i odciążania stali zbrojeniowej.

Uściślenia wymaga sposób wykorzystania całkowych kryteriów: dynamicznej wytrzymałości betonu (2.1) oraz dynamicznego uplastycznienia stali (2.12) w procesach zmiennego naprężenia o amplitudach kolejno większych i mniejszych niż odpowiednie statyczne wartości wytrzymałości betonu R_b^{st} lub granicy plastyczności stali σ_0 . Dla takich procesów zasadniczymi warunkami poprawnego wyznaczenia dynamicznej wytrzymałości betonu i granicy plastyczności stali są nierówności odpowiednio (2.3) i (2.13). Wymaga to pominięcia z historii naprężania okresów, w których $\sigma_b(t) < R_b^{\text{st}}$ lub $\sigma(t) < \sigma_0$, z wyjątkiem pierwszego cyklu naprężania. Szczegółowo problemy te były rozważane w pracach [14] i [15].

4.4. Procedura numerycznego całkowania równań ruchu

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (3.7) opisujących fizycznie nieliniowy problem dynamiki belek żelbetowych wygodnie jest poszukiwać odpowiednią procedurą numeryczną. Zastosowanie takiej procedury wymaga wprowadzenia dyskretyzacji problemu względem czasu. W pracy wykorzystano bezpośrednią metodę różnicową względem czasu, aproksymując rozwiązanie dla pomieszczeń w każdym węźle podziału osi belki $w(x_i, t^n)$ — w kolejnych chwilach czasowych $t^{n-1} = t^n - \Delta t$, $t^n = n\Delta t$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ — schematem różnic centralnych

$$(4.7) \quad w_i^{n+1} = 2w_i^n - w_i^{n-1} + \Delta t^2 \ddot{w}_i^n,$$

z warunkami początkowymi dla $t^n = 0$

$$(4.8) \quad w_i^0, \quad \dot{w}_i^0, \quad w_i^{-1} = w_i^0 - \Delta t \dot{w}_i^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{w}_i^0.$$

Krok czasowy Δt wyznaczono na podstawie analizy stabilności przyjętej metody całkowania numerycznego dla quasi-liniowego równania różnicowego

(3.7)₁. Oszacowanie stałego kroku czasowego jest identyczne z analogicznym rozwiązaniem sprężystym i ma postać [19]

$$(4.9) \quad \Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{1}{2} \Delta x^2 \sqrt{\frac{\mu}{B}},$$

gdzie B oznacza sztywność zginania przekroju żelbetowego pracującego sprężysto. Nieliniowość fizyczna problemu wymaga ustalenia kroku czasowego z odpowiednim współczynnikiem pewności r , $\Delta t = r \Delta t_{kr}$. Wartość tego współczynnika przyjmuje się w granicach (0,2; 0,96). Zmniejszenie kroku czasowego w stosunku do wartości krytycznej korzystnie wpływa na zbieżność rozwiązania numerycznego.

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono różnicową dyskretyzację problemu dynamiki zarysowanych belek żelbetowych z uwzględnieniem efektów nieliniowości fizycznej betonu i stali. Analizowane modele obliczeniowe przekroju żelbetowego i belki mają cechy modeli fizycznych. Funkcjonowanie w czasie modelu belki określa jawny schemat całkowania równań ruchu. Schemat ten jest warunkowo stabilny. Stabilność procedury numerycznej dla zagadnienia fizycznie nieliniowego jest zapewniona przez stabilność tej procedury dla analogicznego zagadnienia liniowo sprężystego. O kroku całkowania decyduje jednak wymaganie właściwej zbieżności. Powoduje to konieczność ustalenia kroku czasowego jako mniejszego niż krok krytyczny. Na zbieżność procedury obliczeniowej ma duży wpływ sposób całkowania równania konstytutywnego sprężysto/lepkoplastyczności dla stali zbrojeniowej. Na podstawie doświadczeń numerycznych stwierdzono, że celowe jest stosowanie niejawniej metody Eulera do całkowania związków konstytutywnych dla stali.

Ze względu na zaniedbanie zdolności odkształceniowych betonu na rozciąganie oraz analizę jednowymiarowych stanów naprężenia zgodnie z techniczną teorią belek, przy wykorzystaniu założenia o płaskich przekrojach w przedstawionym algorytmie nie jest możliwa analiza utraty przyczepności betonu i stali rozciąganej na odcinkach pomiędzy rysami. Efekt ten rzutuje na rozkład naprężeń i odkształceń w stali rozciąganej wzdłuż belki, a także — w konsekwencji — na przemieszczenia. Jednakże znaczne deformacje belek w zakresie sprężysto-plastycznym inicjują powstawanie sił tarcia, których działanie rekompensuje w pewnym stopniu efekt utraty przyczepności. Zaniedbanie efektu utraty przyczepności betonu i stali uniemożliwia śledzenie powstawania rys na długości elementu. W modelu nie uwzględniono również wpływu rys ukośnych wywołanych działaniem sił poprzecznych na wartości przemieszczeń. Założenie to jest poprawne jedynie dla belek o odpowiednio dużym wskaźniku ściskania lub dla belek o wysokiej rysoodporności na

odcinkach przypodporowych. Taką rysoodporność stref przypodporowych można zapewnić stosując odpowiednie zbrojenie poprzeczne belki.

Pełną ocenę modelu obliczeniowego belki żelbetowej wraz z weryfikacją przyjętych założeń można uzyskać na drodze odpowiednich porównań wyników rozwiązań teoretycznych z wynikami doświadczalnymi. Zagadnienie to jest przedmiotem drugiej części pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. Ю. МУРАШЕВ, *Трещиностойчивость, жесткость и прогнозность железобетона*, Машиностроиздат, Москва 1950.
2. W. KUCZYŃSKI, *Konstrukcje betonowe. Kontynuacja teorii zginania żelbetu*, PWN, Warszawa 1971.
3. M. KNAUFF, *O obliczaniu przemieszczeń belek żelbetowych metodą dwóch prostych*, Wyd. PW, Budownictwo, z. 65, Warszawa 1979.
4. D. NGO, A. C. SCORDELIS, *Finite element analysis of reinforced concrete beams*, J. ACI, **64**, 3, 152–163, 1967.
5. J. H. ARGYRIS, G. FAUST, J. SZIMMAT, E. P. WARNKE, K. J. WILLAM, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy obciążeń niszczących trójwymiarowe konstrukcje żelbetowe*, Prace Konferencji „Zastosowanie MES w Nieliniowych Zagadnieniach Teorii Sprężystości i Plastyczności”, Jabłonna, 23–28 września 1974, 379–445, Ossolineum, 1977.
6. A. SITKO, Z. SULIMOWSKI, *Program MESBET-I do analizy płaskich ustrojów żelbetowych pod obciążeniem doraźnym*, XXXII Konferencja Naukowa KILIW PAN i KN PZITB, T. 2, 41–46, Krynica 1986.
7. L. NILSSON, *Impact loading of concrete structures*, Chalmers University of Technology, Department of Structural Mechanics, Publication 79:1, Göteborg 1979.
8. F. EMRICH, J. HERTER, G. PUFFER, *Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete beams under impact load in comparison with experimental results*, Proc. RILEM-CEB-IABSE-IAAS-Interassociation Symposium “Concrete Structures Under Impact and Impulsive Loading”, II-Proceedings, 455–471. Berlin (West), June 2–4, 1982.
9. M. J. MIKKOLA, H. S. SINSALO, *Nonlinear analysis of reinforced concrete structures*, Proc. RILEM-CEB-IABSE-IAAS-Interassociation Symposium “Concrete Structures Under Impact and Impulsive Loading”, II-Proceedings, 534–547. Berlin (West), June 2–4, 1982.
10. J. GHABOUSSI, W. A. MILLAVEC, J. ISENBERG, *R/C structures under impulsive loading* J. Structural Enging., **110**, 3, 505–522, 1984.
11. E. A. WITMER, H. A. BALMER, J. W. LEECH, T. H. H. PIAN, *Large dynamic deformations of beams, rings, plates and shells*, AIAA J., **1**, 8, 1848–1857, 1963.
12. G. BAK, B. KOPYŚCIŃSKI, A. STAŃCZYK, A. STOLARSKI, *Analiza numeryczna dynamicznie obciążonych belek i płyt sprężysto-plastycznych metodą różnic skończonych*, Biul. WAT, nr 6 (394), 101–120, czerwiec 1985.
13. G. BAK, A. STOLARSKI, *Metoda różnicowa w dynamice zarysowanych belek żelbetowych*, Biul. WAT, nr 10 (350), 55–68, październik 1981.
14. G. BAK, A. STOLARSKI, *Niestandardowa idealizacja dynamicznego zachowania betonu dla jednoosiowego ściskania*, Rozpr. Inż., **36**, 2, 1988.
15. G. BAK, A. STOLARSKI, *Delayed yield effect in dynamic flow of elastic visco-perfectly plastic material*. Arch. Mech., **37**, 4–5, 285–302, 1985.

16. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 321-332, 1963.
17. J. D. CAMPBELL, *The dynamic yielding of mild steel*, Acta Metall., **1**, 706-710, 1953.
18. J. KLEPACZKO, *Dane o własnościach plastycznych stali konstrukcyjnych podczas obciążeń dynamicznych*, Sprawozdanie IPPT, Warszawa 1980.
19. G. ВАК, *Bezpośrednia metoda różnicowa w dynamice konstrukcji sprężystych*, Mechanika i Komputer, T. 5, 159-175, Warszawa 1983.

Резюме

**НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК ПОДВЕРГНУТЫХ
ДЕЙСТВИЮ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЖЕНИЙ
ЧАСТЬ I. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ**

Приведена дискретная формулировка разностной задачи динамики трещинообразованной железобетонной балки. Учтены материальные динамические эффекты. Модель деформирования бетона охватывает эффект запаздывания пластических деформаций, а также материального ослабления с учетом деградации упругих свойств. Армированная сталь трактуется как упруго/вязко-идеально пластический материал с учетом эффекта запаздывания текучести. Представлены дискретная модель деформирования трещинообразованного железобетонного сечения и динамическая модель балки. Приведен алгоритм определения упруго-пластических перемещений. Указана возможность использования модели в теоретическом описании исчерпания несущей способности сжимаемой зоны критического сечения балки.

SUMMARY

**NONLINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS UNDER
IMPULSIVE LOAD
PART I. DISCRETIZATION OF THE REINFORCED CONCRETE BEAM
DYNAMIC PROBLEM**

The discret difference formulation of the dynamic R/C cracked beam problem is given in the paper. Materials dynamic effects are taken into consideration. The deformation model of concrete puts the delayed plastic strain effect and material softening with elastic degradation properties. Reinforcement steel is treated as the elastic/visco-perfectly plastic material with regard to the delayed yield effect. The algorithm is given to calculate the elastic-plastic displacements. It bases on the layered model of straining of the cracked R/C section and the lumped beam model. Possibility of exploiting the model in theoretical description of exhausting the load-carrying capacity of the compression zone in the critical section of the beam is showed.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji w dniu 9 września 1987 r.