

METODA OBLICZANIA WSPÓŁCZYNNIKA KSZTAŁTU ORAZ ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ DLA PŁASKIEJ PRÓBKII ZE ŚRODKOWYM OTWOREM (*)

DANIEL KUJAWSKI (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono wzór analityczny na obliczanie współczynnika kształtu dla próbek płaskich o skończonej szerokości z karbem w postaci otworu. Zaproponowano również metodę pozwalającą na obliczanie rozkładu lokalnych odkształceń sprężysto-plastycznych i naprężeń w pobliżu karbu. Analizę przeprowadzono opierając się na rozwiązaniu dla sprężystej płyty ze szczeliną o zaokrąglonym wierzchołku. Do obliczeń lokalnych naprężeń i odkształceń adaptowano zależność Neubera. Wyniki doświadczalne oraz otrzymane metodą elementów skończonych porównano z wynikami obliczonymi proponowaną metodą.

1. WSTĘP

Tradycyjne obliczenia projektowe polegają na doborze takiego przekroju, aby naprężenia nominalne w przekroju najbardziej niebezpiecznym były mniejsze od granicy plastyczności. Takie podejście jest właściwe dla elementów z małą koncentracją naprężeń spowodowanych zmianą kształtu lub wymiarów poprzecznych. Koncentracja naprężeń wynikająca ze zmiany kształtu elementu określana jest jako działanie karbu. Przez pojęcie karbu rozumie się w ogólności wszelkie nieciągłości poprzecznych przekrojów elementów takie, jak różnego rodzaju odsadzenia, rowki, otwory, wycięcia itp. Spiętrzenie naprężeń osiąga największą wartość σ_{\max} na dnie karbu w elemencie z materiału doskonale sprężystego. Naprężenia σ_{\max} mogą być istotnie większe od naprężeń nominalnych σ_n . Wielkość σ_{\max} może przewyższać granicę plastyczności materiału.

Na podstawie różnych badań statystycznych dotyczących uszkodzeń części maszyn przyjmuje się, że karby były przyczyną 33% zniszczeń elementów w czasie eksploatacji [1]. Ponieważ karby nie są do uniknięcia w rzeczywistych konstrukcjach, dlatego też problem oceny lokalnych naprężeń w pobliżu karbu jest bardzo ważny z inżynierskiego punktu widzenia.

(*) Praca została wykonana w ramach CPBP 02.01

Stosunek wielkości naprężeń σ_{\max} do σ_n jest miarą koncentracji naprężeń, wyrażoną przez współczynnik kształtu lub teoretyczny współczynnik koncentracji naprężeń α_k . Współczynnik kształtu α_k jest najczęściej stosowany do analizy naprężeń w pobliżu karbu.

Podstawą do obliczeń koncentracji naprężeń było klasyczne rozwiązanie Griffitha dla sprężystej płyty o nieskończonych wymiarach i jednostkowej grubości obciążonej prostopadle do środkowego karbu w postaci wydłużonej elipsy. Współczynnik kształtu dla wierzchołka karbu wyraża się wzorem

$$(1.1) \quad \alpha_k = \sigma_{\max}/\sigma_n = 1 + \frac{2a}{b},$$

gdzie a oznacza długość dużej półosi elipsy oraz b długość małej półosi elipsy.

Promień krzywizny wierzchołka elipsy można aproksymować za pomocą wielkości $\rho = b^2/a$, skąd z równania (1.1) otrzymamy

$$(1.2) \quad \alpha_k = 1 + 2\left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2}.$$

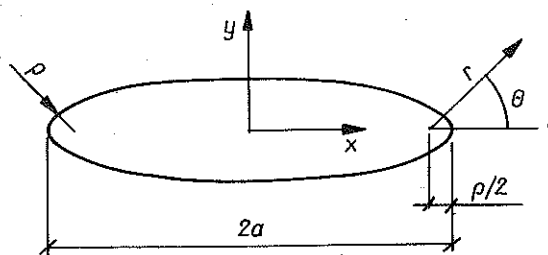
Dla karbu w kształcie otworu o promieniu $\rho = a$ ze wzoru (1.2) otrzymamy $\alpha_k = 3$.

W ogólności współczynnik kształtu zależy od kształtu karbu i wymiarów elementu. Dla płyty o skończonej szerokości współczynnik kształtu bada się doświadczalnie i numerycznie, a wyniki przedstawia się w postaci wykresów [4—7]. W badaniach doświadczalnych najczęściej stosuje się metody tensometryczne lub elestoptyczne, a w obliczeniach numerycznych dominuje metoda elementów skończonych. Brak wzoru analitycznego do obliczania współczynnika kształtu i konieczność korzystania z wykresów stwarza znaczne trudności w projektowaniu wspomaganym komputerowo. Jest to szczególnie ważne w optymalizacji, gdy zachodzi konieczność przeprowadzania obliczeń dla różnych wariantów celem wybrania konstrukcji optymalnej.

W pracy przedstawiono prostą metodę obliczania współczynnika kształtu oraz rozkładu lokalnych naprężeń i odkształceń dla rozciąganej próbki płaskiej ze środkowym otworem. Metoda ta może być łatwo wykorzystana w projektowaniu wspomaganym komputerowo.

2. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W POBLIŻU SZCZELINY Z ZAOKRĄGLONYM WIERZCHOŁKIEM

Pole naprężeń w okolicy szczeliny z zaokrąglonym wierzchołkiem dla rozciąganej płyty o jednostkowej grubości wykonanej z materiału liniowo-sprężystego zostało podane w pracy [2]. Składowe stanu naprężenia wg oznaczeń przedstawionych na rys. 1 mają następującą postać:



Rys. 1. Układ współrzędnych przyjęty do analizy naprężeń

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma_y &= \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2}, \end{aligned}$$

gdzie ρ oznacza promień krzywizny wierzchołka szczeliny, a K współczynnik intensywności naprężeń wyrażony wzorem

$$(2.2) \quad K = \sigma(\pi a)^{1/2}.$$

Zakładając, że płyta jest dostatecznie cienka (tzn. występuje płaski stan naprężenia) w wierzchołku szczeliny będą tylko naprężenia σ_y , których wielkość σ_{\max} otrzymamy ze wzoru (2.1)₂, podstawiając $r = \rho/2$ i $\theta = 0$:

$$(2.3) \quad \sigma_{\max} = \frac{2K}{(\pi\rho)^{1/2}}.$$

Podstawiając (2.2) do (2.3) otrzymamy

$$(2.4) \quad \sigma_{\max} = 2\sigma \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Wzór na σ_{\max} otrzymany ze wzoru (1.2), ma postać

$$(2.5) \quad \sigma_{\max} = \sigma_n \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \right].$$

Z porównania wzorów (2.4) i (2.5) wynika, że są one równoważne w przypadku, gdy $a/\rho \gg 1$ (dla płyty o nieskończonej szerokości $\sigma = \sigma_n$). Aby wzory (2.4) i (2.5) były równoważne w całym zakresie stosunku a/ρ , wzór (2.4) można przedstawić w postaci

$$(2.6) \quad \sigma_{\max} = 2\sigma \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} G,$$

gdzie G jest współczynnikiem korekcyjnym, który obliczamy przyrównując prawe strony (2.5) i (2.6):

$$(2.7) \quad G = 1 + \left(\frac{\rho}{4a} \right)^{1/2}$$

Po podstawieniu (2.7) do (2.6) otrzymamy

$$(2.8) \quad \sigma_{\max} = 2\sigma \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\rho}{4a} \right)^{1/2} \right]$$

Wzory (2.5) i (2.8) są sobie równoważne dla płyty o nieskończonej szerokości. Korzystając ze wzoru (2.2) można (2.8) przedstawić w następującej postaci

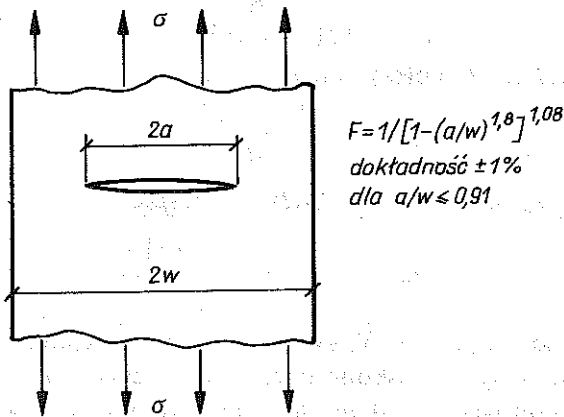
$$(2.9) \quad \sigma_{\max} = \frac{2K}{(\pi\rho)^{1/2}} G.$$

Aby wzór (2.9) mógł być stosowany dla płyty o skończonej szerokości, należy uwzględnić współczynnik korekcyjny przy obliczaniu K i G . Współczynnik ten jest zależny od stosunku a/w , gdzie $2w$ jest szerokością płyty ze środkową szczeliną o długości $2a$.

Wzór na obliczanie K dla płyty o skończonych wymiarach ma postać

$$(2.10) \quad K = \sigma(\pi a)^{1/2}(F)^{1/2}$$

Wzór zaproponowany w pracy [3] do obliczania współczynnika korekcyjnego F podany jest na rys. 2. Zakładając, że wpływ skończonych wymiarów płyty na



Rys. 2. Obliczanie współczynnika korekcyjnego F dla rozciąganej próbki ze środkową szczeliną [3]

współczynniki G i K jest podobny, wzór (2.9) może być napisany w postaci

$$(2.11) \quad \sigma_{\max} = \frac{2K}{(\pi\rho)^{1/2}} FG.$$

Po podstawieniu (2.2) i (2.7) do (2.11) oraz wykonaniu prostych przekształceń otrzymamy

$$(2.12) \quad \sigma_{\max} = \sigma F \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \right],$$

gdzie σ jest naprężeniem obliczonym dla całkowitego przekroju próbki. Zależność między naprężeniem σ a naprężeniem nominalnym σ_n wyraża się wzorem

$$(2.13) \quad \sigma = \sigma_n \frac{A_n}{A},$$

gdzie A jest polem przekroju całkowitego, a A_n polem przekroju nominalnego próbki. Podstawiając (2.13) do (2.12) otrzymamy

$$(2.14) \quad \sigma_{\max} = \sigma_n \frac{A_n}{A} F \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \right].$$

3. OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKA KSZTAŁTU

Z zależności (2.14) otrzymamy

$$(3.1) \quad \alpha_k = \sigma_{\max} / \sigma_n = \frac{A_n}{A} F \left[1 + 2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \right].$$

Wzór (3.1) pozwala obliczać współczynnik kształtu dla rozciąganej płaskiej próbki o szerokości $2w$ ze środkowym karbem, gdy znany jest jego kształt, tzn. wielkość karbu $2a$ mierzona prostopadłe do działającej siły i promień krzywizny wierzchołka ρ .

Dla próbki płaskiej ze środkowym otworem o średnicy $2a$, dla której $\rho = a$, ze wzoru (3.1) otrzymamy

$$(3.2) \quad \alpha_k = \frac{3A_n}{A} F.$$

4. OBLICZANIE LOKALNYCH NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ

Wzór (2.6) na maksymalne naprężenia w wierzchołku karbu otrzymano z (2.1)₂, wprowadzając współczynnik korekcyjny G dany wzorem (2.7). Postępując w podobny sposób i podstawiając $\theta = 0$ do (2.1)₂, możemy otrzymać wzór na naprężenia teoretyczne:

$$(4.1) \quad \sigma_t = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \left(1 + \frac{\rho}{2r} \right) G.$$

Uwzględniając wpływ skończonych wymiarów szerokości próbki na współczynniki K i G , wzór (4.1) przyjmie następującą postać:

$$(4.2) \quad \sigma_t = \frac{(F)^{1/2} K}{(2\pi r)^{1/2}} \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right) (F)^{1/2} G.$$

Po podstawieniu (2.6) (2.10) i (2.13) do (4.2) otrzymamy

$$(4.3) \quad \sigma_t = \frac{A_n \sigma_n(a)^{1/2}}{A (2r)^{1/2}} F \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right) \left[1 + \left(\frac{\rho}{4a}\right)^{1/2}\right].$$

Wzór (4.3) pozwala obliczać naprężenia teoretyczne ($\theta = 0$) w zależności od współrzędnej r dla próbki wykonanej z materiału liniowo-sprężystego. W przypadku materiału sprężysto-plastycznego, gdy w pobliżu wierzchołka karbu wystąpi uplastycznienie, wielkości naprężeń σ_t otrzymane z (4.3) będą naprężeniami fikcyjnymi w stosunku do lokalnych naprężeń σ_l . W celu obliczenia lokalnych naprężeń i odkształceń (σ_b, ε_b) adaptowano znany wzór Neubera, który przedstawiono w postaci

$$(4.4) \quad \bar{\alpha}_k^2 = \alpha_\sigma \alpha_\varepsilon,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\sigma_t}{\sigma_n} \quad \text{lokalny współczynnik kształtu,}$$

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_l}{\sigma_n} \quad \text{współczynnik koncentracji naprężeń,}$$

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_n} \quad \text{współczynnik koncentracji odkształceń,}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\sigma_n}{E} \quad \text{odkształcenia nominalne.}$$

Należy zaznaczyć, że dla wierzchołka karbu tzn. dla $r = \rho/2$, $\bar{\alpha}_k = \alpha_k$ równanie (4.4) redukuje się do klasycznego wzoru NEUBERA [8].

Wzór (4.4) można odpowiednio zmodyfikować i doprowadzić do postaci

$$(4.5) \quad \frac{\sigma_t^2}{E} = \sigma_l \varepsilon_b,$$

gdzie σ_l obliczamy ze wzoru (4.3).

Z równania (4.5) i równania krzywej odkształcenia materiału $\sigma = f(\varepsilon)$ otrzymuje się układ dwóch równań umożliwiający obliczanie lokalnych naprężeń i odkształceń.

Odkształcenie materiału można opisać znanym wzorem Ramberga-Osgooda; odpowiednia krzywa ma postać

$$(4.6) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K} \right)^{1/\bar{n}}$$

gdzie K jest współczynnikiem wytrzymałości, a \bar{n} wykładnikiem umocnienia materiału.

W przypadku obciążeń cyklicznych należy posłużyć się krzywą cykliczną

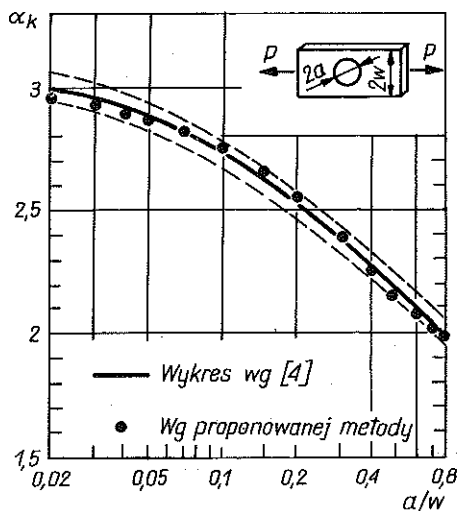
$$(4.7) \quad \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'}$$

gdzie ε_a i σ_a są odpowiednio amplitudami odkształcenia i naprężenia; K' jest współczynnikiem wytrzymałości a n' wykładnikiem umocnienia cyklicznego materiału.

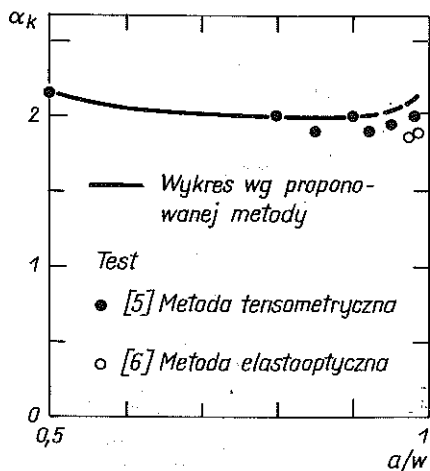
5. PORÓWNANIE WYNIKÓW

Porównania wyników dokonano dla próbek płaskich o szerokości $2w$ ze środkowym otworem o średnicy $2a$.

Na rys. 3 wyniki obliczeniowe współczynnika kształtu otrzymane ze wzoru (3.2) porównano z wykresem podanym przez autorów pracy [4]. Dokładność proponowanej metody obliczania współczynnika kształtu zawiera się w przedziale $\pm 2\%$ (przedział ten zaznaczono liniami przerywanymi) w stosunku do wielkości podanych w pracy [4].

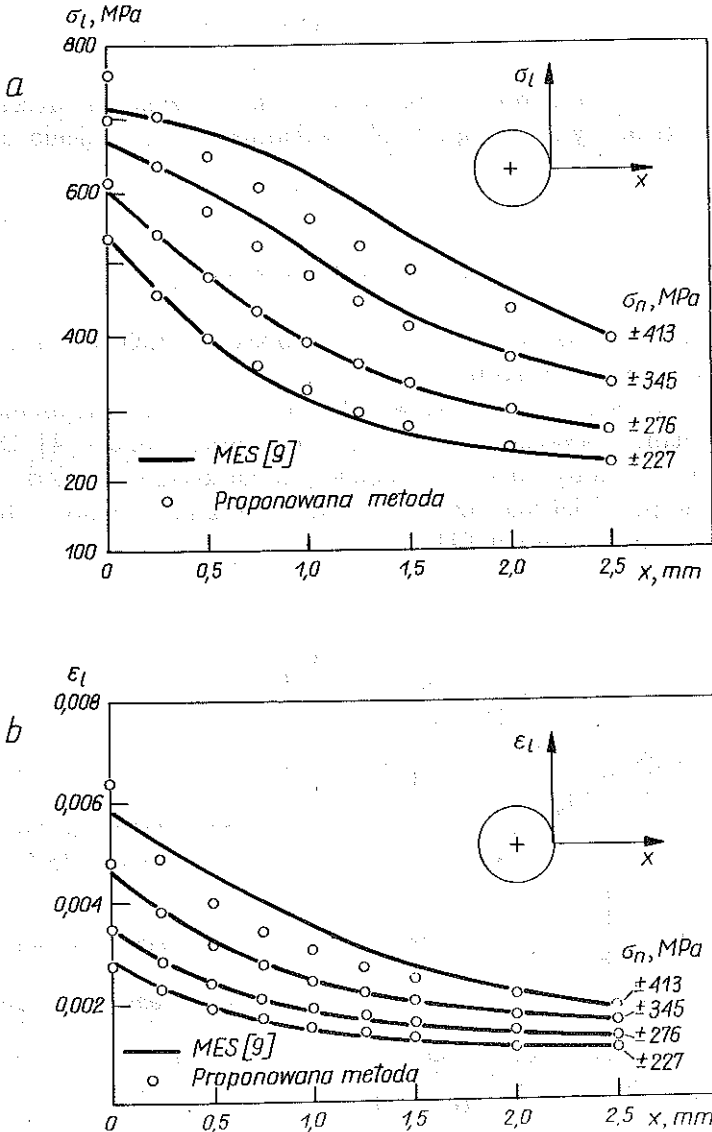


Rys. 3. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płaskiej próbki ze środkowym otworem



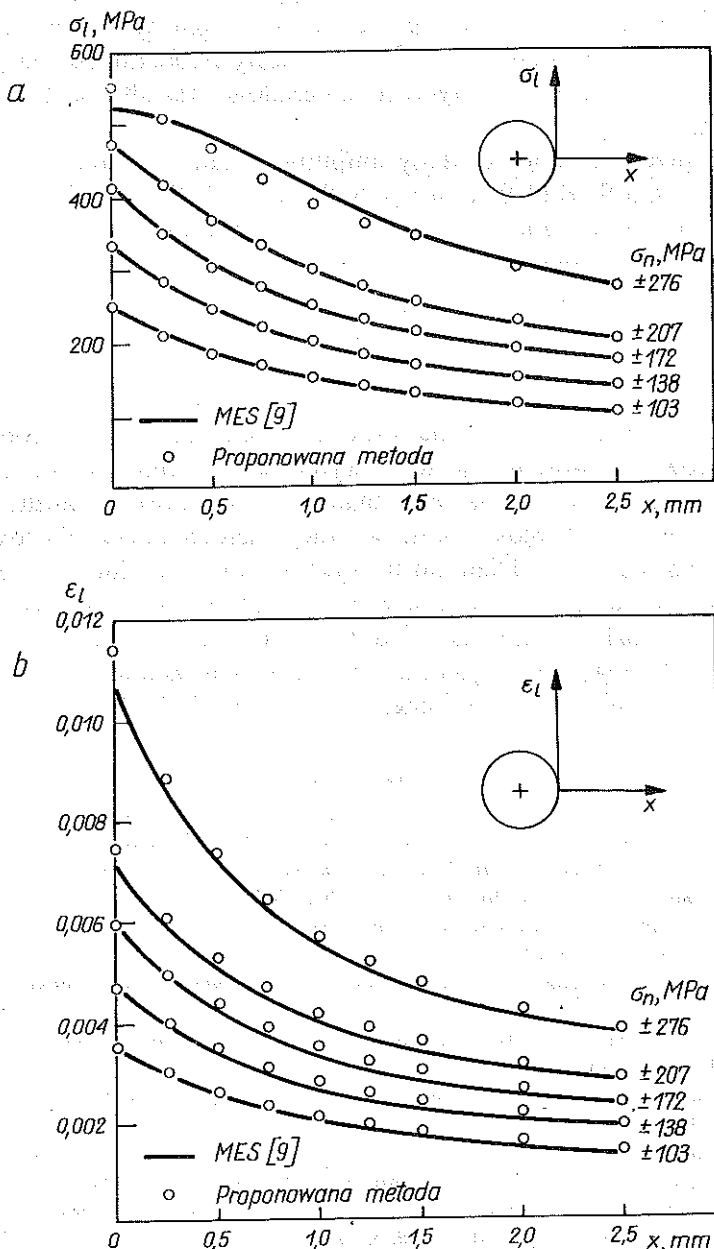
Rys. 4. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płaskiej próbki ze środkowym otworem o dużej średnicy

Przeprowadzono również obliczenia współczynnika kształtu dla próbek o stosunku $a/w > 0,8$ i porównano je z wynikami doświadczalnymi. Porównanie wyników przedstawione na rys. 4 pokazuje dobrą zgodność pomiędzy proponowanym wzorem (3.2) a wynikami doświadczalnymi. Linią przerywaną (rys. 4) zaznaczono wartości obliczeniowe otrzymane dla stosunku $a/w > 0,91$. Zawyżone wartości obliczeniowe w stosunku do doświadczalnych dla $a/w >$



Rys. 5a) Rozkład lokalnych naprężeń, b) odkształceń przy rozciąganiu płaskiej próbki ze środkowym otworem (stal SAE 4340)

> 0,95 wynikają głównie z błędów, jakie powstaje z przyjętej aproksymacji wzoru na współczynnik F , podanego na rys. 2 (poza zakres dokładności $\pm 1\%$, tj. dla $a/w > 0,91$).



Rys. 6a) Rozkład lokalnych naprężeń, b) odkształceń przy rozciąganiu płaskiej próbki ze środkowym otworem (stop Al 7075-T6)

Analizę lokalnych naprężeń i odkształceń przeprowadzono dla dwóch materiałów: stali SAE 4340 i stopu Al7075-T6. Rozkłady lokalnych naprężeń i odkształceń, obliczone proponowaną metodą, porównano z wynikami pracy [9] otrzymanymi metodą elementów skończonych. W obliczeniach założono, że płaskie próbki o szerokości $2w$ ze środkowym otworem o średnicy $2a$ poddane były symetrycznym cykлом naprężeń nominalnych. Obliczenia przeprowadzono przy wykorzystaniu krzywych cyklicznych badanych materiałów. Przyjęte do obliczeń wielkości dotyczące materiałów i kształtu próbek podane są w tabelicy 1.

Na rys. 5 przedstawiono rozkłady amplitud lokalnych naprężeń σ_t i odkształceń ϵ_t dla stali SAE 4340, a na rys. 6 dla stopu Al7075-T6. Rysunki 5 i 6 pokazują dosyć dobrą zgodność pomiędzy proponowaną metodą obliczeń a metodą elementów skończonych.

6. WNIOSKI

Proponowana metoda obliczania współczynnika kształtu dla próbek płaskich ze środkowym otworem daje dobre wyniki w szerokim zakresie stosunku $a/w \leq 0,95$. Otrzymany tą metodą wzór analityczny może być użyteczny w obliczeniach inżynierskich. Przedstawiona w pracy metoda obliczania lokalnych naprężeń i odkształceń w pobliżu karbu wykazuje dużą zgodność z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych. Proponowane metody analizy koncentracji oraz rozkładu naprężeń i odkształceń dla próbek płaskich ze środkowym otworem mogą być użyteczne i łatwo wykorzystane w obliczeniach projektowych wspomaganych komputerowo.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. KOCANĀDA, J. SZALA, *Podstawy obliczeń zmęczenia*, PWN, Warszawa 1985.
2. M. CREAGER and P. C. PARIS, *Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking*, Int. J. Fracture Mech., **3**, 247–252, 1967.
3. T. G. F. GRAY, *Convenient closed form stress intensity factor for common crack configurations*, Int. J. Fracture, **13**, 65–75, 1977.
4. M. E. NIEZGODZIŃSKI, T. NIEZGODZIŃSKI, *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*, PWN, Warszawa 1973.
5. V. J. PARKS and D. F. MENDOZA, *Maximum stress in a tensile strip with a large hole*, Experimental Mech., **15**, 389–391, 1975.
6. P. D. FLYNN, *Stress concentration in tensile strips with large circular holes*, Experimental Mech., **15**, 386–388, 1975.
7. H. NISITANI and N. A. NODA, *Stress concentration of strip with double edges notches under tension or in-plane bending*, Engng. Fracture Mech., **23**, 6, 1051–1065, 1986.
8. H. NEUBER, *Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary non-linear stress-strain law*, J. Appl. Mech., **28**, 4, 544–550, 1961.
9. D. T. RASKIE, *Fatigue failure predictions for plates with holes and edge notches*, J. Testing and Evaluation, JTEVA, **1**, 5, 394–404, 1973.

Резюме

МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ФОРМЫ А ТАКЖЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ПЛОСКОГО ОБРАЗЦА
С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе разработана аналитическая формула для расчета коэффициента формы для плоских образцов конечной ширины с надрезом в виде отверстия. Предложен тоже метод, позволяющий рассчитать распределение локальных упруго-пластических деформаций и напряжений вблизи надреза. Анализ проведен, опираясь на решения для упругой плиты со трещиной с округленной вершиной. Для расчетов локальных напряжений и деформаций адаптирована зависимость Нейбера. Экспериментальные результаты и результаты, полученные методом конечных элементов, сравнены с результатами вычисленными предлагаемым методом.

SUMMARY

SHAPE FACTOR EVALUATION AND STRESS AND STRAIN DISTRIBUTIONS
IN A PLANE SPECIMEN WITH A CENTRAL HOLE

An analytical formula is derived to evaluate the shape factor for plane specimens of finite widths and containing a central hole. A method is also proposed to calculate the local elastic-plastic deformations in the vicinity of the hole. The analysis is based on the solution concerning an elastic plate containing a crack with rounded tips. Neuber's formula is adopted to evaluate the local strains and stresses. Known experimental results and those obtained by means of the finite element method are compared with the data resulting from the method proposed in the paper.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT PODSTAW BUDOWY MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 maja 1987 r.
