

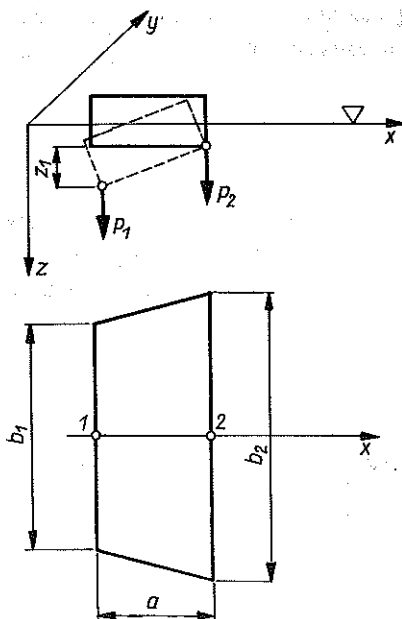
## WPLYW ODKSZTAŁCALNOŚCI PONTONÓW NA ROZWIĄZANIA STATYKI MOSTÓW PLYWAJĄCYCH

RYSZARD PIKORSKI (GDAŃSK)

W statyce pływających mostów składanych nie uwzględnia się z reguły odkształcalności pontonów [3], zakładając ich niewielką podatność na zginanie wobec małych wymiarów elementów. Jednakże w przypadku zwarcia kilkunastu pontonów między sobą, wpływ odkształcalności może być istotny. W niniejszej pracy sformułowano równania pozwalające uwzględnić odkształcalność pontonów i ich bezpośredni wpływ na rozwiązania statyki mostu sztywnego. Wprowadzony model matematyczny znajduje szersze zastosowanie w okrętownictwie do zagadnienia zginania belki o zmiennej sztywności na zmiennym podłożu sprężystym [2].

### 1. WYPROWADZENIE PODSTAWOWYCH RÓWNAŃ

Niech most pontonowy składa się z pontonów, których wymiary zmieniają się liniowo, (rys. 1). Relacja siły-zanurzenia przegubów dla pojedynczego pontonu ma wtedy postać (1.1), wynikającą z warunku samozrównowazenia:



Rys. 1

$$(1.1) \quad \{P_i\} = k \begin{bmatrix} 4-l & 2-l \\ 2-l & 4-3l \end{bmatrix} \{z_i\}, \quad i = 1, 2,$$

gdzie

$$k = \frac{\gamma b_1 a}{12}, \quad l = \frac{b_1 - b_2}{b_1},$$

$\gamma$  oznacza ciężar właściwy wody.

### 1.1. Równania równowagi

Złożenie elementów w most pontonowy, przy wykorzystaniu ciągłości ugięć w przegubach, prowadzi do układu równań  $p = Kz$  o następującej budowie:

$$(1.2) \quad \left. \begin{aligned} p_i &= [(2-l_i)k_i, (4-3l_i)k_i + (4-l_{i+1})k_{i+1}, (2-l_{i+1})k_{i+1}] \begin{Bmatrix} z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \end{Bmatrix}, \\ p_0 &= [(4-l_1)k_1, (2-l_1)k_1] \begin{Bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \\ p_n &= [(2-l_n)k_n, (4-3l_n)k_n] \begin{Bmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{Bmatrix}, \end{aligned} \right\}$$

gdzie

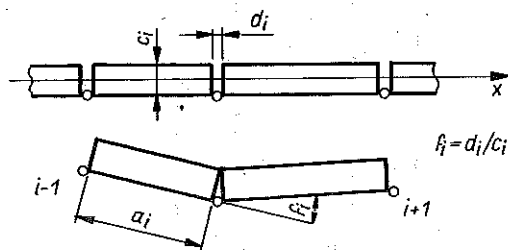
$$k_i = \frac{\gamma b_{i-1} a_i}{12}, \quad l_i = \frac{b_{i-1} - b_i}{b_{i-1}}$$

oraz gdzie  $\gamma$  oznacza ciężar właściwy wody,  $b_{i-1}$ ,  $b_i$  — szerokości elementu o nr  $i$ ,  $a_i$  — długość elementu  $i$ .

Powyższy układ przedstawia równania równowagi szeregu pontonów nieodkształcalnych, połączonych przegubami pozwalającymi im swobodnie się obracać.

### 1.2. Więzy sztywne (jednostronne)

Jeżeli wprowadzimy więzy ograniczające swobodę obrotu, dopuszczając jednakże początkowy luz  $f_i$  w każdym przegubie (rys. 2), to wzajemne ugięcia pontonów będą ograniczone jednostronnymi więzami o postaci  $f \geq L^T z$ :



Rys. 2

$$f_i \geq \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_{i+1}} & -\frac{1}{a_{i+1}} \end{bmatrix} \begin{matrix} z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \end{matrix},$$

(1.3)

$$f_0 \geq \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{1}{a_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} z_0 \\ z_1 \end{matrix}, \quad f_n \geq \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} z_{n-1} \\ z_n \end{matrix},$$

gdzie  $f_0$  i  $f_n$  oznaczają więzy zewnętrzne na końcach mostu (jeśli będą narzucone).

Zakładając więzy idealne, oddziaływanie ich na układ można sprowadzić do reakcji  $r$ :

$$(1.4) \quad r = m \text{ grad } F = -Lm,$$

gdzie

$$F(z) = f - L^T z \geq 0$$

oznacza równanie więzów oraz  $m$  wektor mnożników Lagrange'a (momentów zwarcia).

Układ (1.2) przyjmie wtedy postać  $Kz = p + r$  lub

$$(1.5) \quad \begin{aligned} p &= Kz + Lm, \\ f &\geq L^T z, \quad m \geq 0. \end{aligned}$$

W zwarcu mamy zatem do wyznaczenia ugięcia  $\{z\}$  i momenty zwarcia  $\{m\}$ .

### 1.3. Więzy sprężyste

Uwzględnienie odkształcalności pontonów w stanie zwartym mostu można zrealizować wprowadzając model więzów sprężystych, tzn. takich, że moment zwarcia jest proporcjonalny do wzajemnych obrotów pontonów w przegubach (po wyczerpaniu luzów)

$$(1.6) \quad m_i = g_i(f_i - f_0),$$

gdzie  $g_i$  oznacza sztywność na obrót przegubów oraz  $f_0$  wstępny luz w przegubach.

Przybliżając linię ugięcia mostu łukiem koła o promieniu  $R$ , przeprowadzonym przez trzy kolejne przeguby pontonów i uwzględniając, że  $m_i = EJ/R$ , gdzie  $EJ$  oznacza sztywność pontonów na zginanie, z prostych związków geometrycznych otrzymamy

$$(1.7) \quad g_i = \frac{EJ_i + EJ_{i+1}}{a_i + a_{i+1}}.$$

W ten sposób pełny układ równań równowagi mostu zwartego odkształcalnego ma postać następującą:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} p &= Kz + Lm, \\ m &= G(f - f_0), \\ f &= L^T z \quad (m = 0 \quad \text{gdy} \quad f < f_0), \end{aligned}$$

gdzie  $G = \text{diag}(g_i)$  i oznacza macierz sztywności układu.

Wprowadzenie sprężystych przegubów w moście pontonowym jest uzasadnione z dwóch powodów: 1) podział mostu na pontony wymusza z góry podział na elementy; 2) w stanie rozwartym sztywność giętna pontonów nie ma istotnego wpływu na rozwiązania.

W dalszej części pracy skoncentrujemy się na zagadnieniu wpływu odkształcalności pontonów na rozwiązania w stanie zwartym mostu.

## 2. ROZWIĄZANIA W STANIE ZWARTYM MOSTU

W stanie zwartym nierówności definiujące więzy w równaniach (1.5) i (1.8) stają się równościami.

W przypadku mostu sztywnego układ (1.5) ma postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p &= Kz_0 + Lm_0, \\ f_0 &= L^T z_0. \end{aligned}$$

Rozwiązania tego układu można przedstawić w następującej postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} m_0 &= A^{-1}(Bp - f_0), \\ z_0 &= K^{-1}(p - Lm_0), \end{aligned}$$

gdzie

$$B = L^T K^{-1}, \quad A = BL.$$

W przypadku mostu odkształcalnego

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p &= Kz + Lm, \\ m &= G(f - f_0), \\ f &= L^T z. \end{aligned}$$

Rozwiązania są następujące:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} z &= C^{-1}(p + p_0), \\ m &= Dz - m_0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} m_0 &= Gf_0, & p_0 &= Lm_0, \\ C &= K + LGL^T, & D &= GL^T. \end{aligned}$$

Układ ten jest dobrze uwarunkowany, jeśli macierze wchodzące w skład macierzy  $C$  mają elementy o zbliżonych rzędach wielkości. W przeciwnym wypadku można „zgubić” sztywność podłoża  $K$  lub częściej sztywność pontonów  $G$  w rozwiązaniach. Innym mankamentem tego rozwiązania jest brak przejścia do rozwiązań układu sztywnego (2.2) i nie można wobec tego oszacować wpływu odkształcalności układu na rozwiązania na tym etapie obliczeń.

### 3. WPLYW ODKSZTAŁCALNOŚCI PONTONÓW NA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA STATYKI MOSTU PONTONOWEGO

W celu oszacowania wpływu odkształcalności układu skonstruujemy iteracyjną procedurę uzyskiwania rozwiązań, biorąc za punkt wyjścia rozwiązanie układu sztywnego (2.2) i wykorzystując równanie konstytutywne

$$(3.1) \quad \Delta f_1 = G^{-1} \Delta m_0,$$

gdzie  $\Delta f_1 = f_1 - f_0$ ,  $\Delta m_0 = m_0$ ;  $f_0$  jest daną krzywizną początkową układu zwartego.

Ponieważ również na podstawie (2.2)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Delta m_1 &= m_1 - m_0 = -A^{-1} \Delta f_1, \\ \Delta z_1 &= z_1 - z_0 = -B^T \Delta m_1, \end{aligned}$$

przeto otrzymuje się w rezultacie rekurencyjny ciąg poprawek do rozwiązania kroku zerowego:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Delta f_i &= G^{-1} \Delta m_{i-1}, \\ \Delta m_i &= -A^{-1} \Delta f_i, \\ \Delta z_i &= -B^T \Delta m_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

#### 3.1. Uwagi o zbieżności metody iteracyjnej [1]

Moment gnący w  $i$ -tym przybliżeniu (3.3) można wyrazić następująco przez moment  $m_0$ :

$$(3.4) \quad m_i = m_0 + \sum_{p=1}^i \Delta m_p = \left( \sum_{p=0}^i (-1)^p M^p \right) m_0,$$

gdzie  $M = (GA)^{-1}$ ,  $M^0 = I$ , a  $m_0$  oznacza wektor momentów gnących w zerowym przybliżeniu układu sztywnego. Relacja (3.4) jest macierzowym szeregiem potęgowym.

UWAGA 1. Macierzowy szereg potęgowy  $\sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p$  jest zbieżny, jeżeli wszystkie wartości własne  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  macierzy  $X$  leżą wewnątrz koła zbieżności odpowiadającego mu szeregu liczbowego  $\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$ . W naszym przypadku  $\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p M^p$  jest zbieżny wewnątrz przedziału  $m \in (-1, 1)$ ; stąd wynika:

UWAGA 2. Warunkiem zbieżności macierzowego szeregu (3.4) jest, aby wartości własne macierzy  $M$  leżały wewnątrz koła o promieniu  $R = 1$ .

Macierz  $G$  ma postać diagonalną  $G = g_k I$  zatem

$$(3.5) \quad |\lambda_k(M)| = \frac{1}{g_k} |\lambda_k(A^{-1})| = \frac{1}{g_k |a_k|} < 1,$$

gdzie  $a_k$  oznaczają wartości własne macierzy  $A$ .

**TWIERDZENIE.** *Jeżeli spełniony jest warunek zbieżności (3.5), to szereg macierzowy (3.4) posiada granicę*

$$(3.6) \quad m = \lim_{i \rightarrow \infty} m_i = (I + M)^{-1} m_0,$$

gdzie  $m$  oznacza rozwiązanie układu odkształcalnego (2.3) oraz  $m_0$  — układu nieodkształcalnego (2.1).

Dowód powyższego twierdzenia jest czysto rachunkowy i polega na sprawdzeniu wzoru (3.6) przy wykorzystaniu (2.1) do rozwiązań (2.3) po uprzednim następującym przekształceniu

$$(3.7) \quad \begin{aligned} m &= (I + M)^{-1} m_0 = (I + M)^{-1} A^{-1} B p, \\ m &= G L^T z = G L^T (K + L G L^T)^{-1} p; \end{aligned}$$

dla uproszczenia przyjęto  $f_0 = 0$ , co nie zmniejsza ogólności dowodu. Łatwo teraz wykazać, że wzory (3.7) są tożsame.

### 3.2. Wnioski końcowe

Znalezione zostało ciągle przejście pomiędzy rozwiązaniami bezpośrednimi układu odkształcalnego (2.3) i pośrednimi układu sztywnego (2.1). Wzór (3.6) pozwala bowiem obliczyć momenty gnące w układzie odkształcalnym na podstawie znajomości rozwiązań układu sztywnego. Z dowodu twierdzenia wynika dodatkowo wniosek, że rozwiązania takie istnieją, nawet gdy zawodzi metoda kolejnych przybliżeń, tzn. nie spełniony jest warunek zbieżności.

## 4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przeprowadzono obliczenia swobodnie pływającego mostu pontonowego składającego się z 14 identycznych pontonów z luzami  $f_0$ , zwartym na całej długości pod obciążeniem siłą skupioną  $P = 600$  kN w środku mostu. Wymiary pontonów były następujące:  $a = 2,3$  m,  $b = 6,3$  m,  $c = 1,0$  m,  $d = 0,008$  m (rys. 1 i 2).

Wyniki przedstawiono w postaci ugięć w [m] i momentów gnących w [kNm] w węźle środkowym pod siłą  $P$ , przy czym: rozwiązanie bezpośrednie otrzymano ze wzorów (2.4); rozwiązania pośrednie ilustrują metodę kolejnych przy-

Tablica 1

$EJ = 5 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$		Ugięcie [m]	Moment gnący [kNm]
Rozwiązanie bezpośrednie		0,537621	1604,55
	przybliżone 0	0,466389	1845,06
	1	0,555178	1538,30
	2	0,532731	1623,07
	3	0,538988	1599,38
	4	0,537239	1606,00
Rozwiązanie końcowe		0,537621	1604,55

Tablica 2

$EJ = 2 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$		Ugięcie [m]	Moment gnący [kNm]
Rozwiązanie bezpośrednie		0,605624	1390,09
	przybliżone 0	0,466389	1845,06
	1	0,688362	1078,16
	2	0,548069	1607,94
	3	0,645839	1237,85
	4	0,577521	1496,48
Rozwiązanie końcowe		0,605624	1390,09

Tablica 3

$EJ = 10^5 \text{ kN/m}^2$		Ugięcie [m]	Moment gnący [kNm]
Rozwiązanie bezpośrednie		0,675421	1195,52
	przybliżone 0	0,466389	1845,06
	1	0,910335	311,26
	2	0,349164	2430,37
	3	1,13132	-530,34
	4	3,822 E-2	3607,68
Rozwiązanie końcowe		0,675421	1195,52

bliżeń (przybliżenie 0 oznacza most sztywny, wzory (2.2)); rozwiązanie końcowe jest ilustracją przejścia granicznego (3.6).

Przyjęto trzy różne sztywności pontonów na zginanie:  $EJ = 5 \cdot 10^5$ ,  $2 \cdot 10^5$  i  $10^5$  [kNm<sup>2</sup>] w celu pokazania, że warunek zbieżności metody kolejnych przybliżeń nie ogranicza zastosowania wyprowadzonego wzoru na moment gnący wynikowy (3.6), opartego na wynikach modelu sztywnego. Mianowicie, dla  $EJ = 10^5$  kNm<sup>2</sup> metoda kolejnych przybliżeń jest rozbieżna, co nie przesądza o wyniku końcowym (por. tablice 1, 2 i 3)

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. P. DEMIDOWICZ, *Matematyczna teoria stabilności*, WNT, Warszawa 1972.
2. R. PISKORSKI, *Zagadnienie zginania belki o zmiennej sztywności na zmiennym podłożu sprężystym jako układ łańcuchowy z więzami dwustronnymi*, Prace Badawcze I. O. P. G. Nr 2188/MR-1087/85, Gdańsk 1985.
3. *Obliczenia wytrzymałościowe mostu pontonowego*, Praca zbiorowa, Wyd. wewn. I. O. P. G. Nr 1901/84 Gdańsk 1984.

## Резюме

## ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ПОНТОНОВ НА РЕШЕНИЯ СТАТИКИ ПЛАВАЮЩИХ МОСТОВ

В статике плавающих составных мостов не учитывается, как правило, деформируемости понтонов [3], предполагая их небольшую податливость на изгиб из-за малых размеров элементов. Однако в случае контакта нескольких понтонов между собой, влияние деформируемости может быть существенным. В настоящей работе сформулированы уравнения позволяющие учитывать деформируемость понтонов и их непосредственное влияние на решения статики жесткого моста. Введенная математическая модель находит широкое применение в кораблестроении для задачи изгиба балки с переменной жесткостью на переменном упругом основании [2].

## SUMMARY

## EFFECT OF PONTOON DEFORMABILITY IN STATICAL ANALYSIS OF PONTOON BRIDGES

In the analysis of pontoon bridges, their deformability is usually disregarded except for small flexibility due to small dimensions of the individual elements. However, in the case when a several (10 or more) pontoons are presented together, effect of deformability of such elements may prove to be considerable. Equations which make it possible to take this effect into account are formulated. The mathematical model introduced is widely used in ship-building industry, in the analysis of bending of a beam of variable rigidity resting on variable elastic foundation.

POLITECHNIKA GDAŃSKA  
INSTYTUT OKREŃTOWY, GDAŃSK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 grudnia 1986 r.*