

STRUKTURY UKŁADÓW LINII NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ  
 W POLACH GRANICZNYCH, SPEŁNIAJĄCYCH WARUNEK  
 HUBERA-MISESA  
 CZĘŚĆ III. STRUKTURALNE WARUNKI ISTNIENIA PÓŁ  
 ELEMENTARNYCH.  
 ZBIORY OSOBLIWYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH

WITOLD BODASZEWSKI (KIELCE)

Rozważono problem istnienia rozwiązań pól elementarnych dla przypadku zadań z kompletnym zespołem warunków. Uwagę skoncentrowano na badaniach zachowania się rozwiązań przy osobliwych warunkach brzegowych, to znaczy takich, dla których wyjściowe struktury pól ulegają degeneracji. Pokazano, że zbiory osobliwych warunków brzegowych lokalizują się bądź na brzegach obszarów wyznaczonych w części II przy słabszych ograniczeniach, bądź tworzą w nich linie lub powierzchnie nieciągłości. Szczegółowo omówiono sytuacje na płaszczyźnie fizycznej, które powstają w polach o strukturach zdegenerowanych. Wyprowadzone wnioski pozwoliły m.in.: a) wyjaśnić efekty związane z degeneracją struktur pól elementarnych; b) znaleźć dolne oszacowanie minimum powierzchni ograniczającej obszar istnienia rozwiązań pól o pięciu obszarach jednorodnych; pola te nie należą do elementarnych; c) określić najmniejszą liczbę linii nieciągłości naprężeń wokół izolowanego węzła tych linii w polu złożonym; d) sformułować jednoznaczne kryterium podziału pól elementarnych i na tej podstawie wykazać, że pola o czterech obszarach — wyodrębnione w części I — stanowią klasę o znaczeniu porównywalnym z wyróżnioną dotąd klasą pól o trzech obszarach jednorodnego stanu naprężenia; e) pokazać najbardziej istotne trudności rozwiązywania nieciągłych i granicznych pól statycznie dopuszczalnych.

*Dodatkowe oznaczenia stosowane w części III*

$l_1, l_2$  liczby obszarów jednorodnego stanu naprężenia; indeksy 1, 2 służą do rozróżnienia dwóch przypadków struktur,

$\Gamma_i^{(n)}$  przedział dopuszczalnej zmienności  $\omega^{(n)}$ , określony na  $\Omega'$ , wyznaczony przy ustalonej  $\omega^{(i)}$  w obszarze „i”,

$\Delta\Gamma^{(3)}$  podprzedział zmienności  $\omega^{(3)}$ , określony na  $\Omega'$  — taki, że jeśli  $\omega \in \Delta\Gamma^{(3)}$ , to

$\Gamma_1^{(5)} = (0, \pi)$  oraz  $\Gamma_5^{(1)} = (0, \pi)$ ,

$O(\mathbf{B}, \epsilon)$  kula elementarna, określona na  $\mathbf{K}$ ,  
 $i, d, d^*$  indeksy.

## 12. DEGENERACJA STRUKTURY UKŁADU LINII NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ

W części II podano, że dla osobliwych warunków brzegowych — to znaczy takich, których obrazem w  $\mathbf{K}$  jest punkt  $\mathbf{B}$  ze zbioru punktów osobliwych (por. rys. 14a, 16) — założona pierwotnie struktura pola ulega degeneracji. Jednym z najbardziej widocznych efektów związanych z degeneracją struktury jest znikanie co najmniej jednej linii nieciągłości naprężeń. Efekt ten powstaje w rezultacie nałożenia dość złożonych warunków, dlatego — by go badać, a następnie formułować wnioski odnoszące się do pól złożonych — rozważmy bliżej jego istotę.

Mówimy, że pole o  $l_2$  obszarach jednorodnego stanu naprężenia ulega degeneracji do pola o  $l_1 < l_2$  obszarach, jeśli zachodzi jedna z następujących sytuacji:

- a) ciąg parametrów naprężeniowych  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(l_2)}$  zawiera  $l_2 - l_1 \geq 1$  par wartości, dla których zachodzi  $\omega^{(n)} = \omega^{(n+1)}$  (aktywne warunki (10.7)),
- b) konfiguracje układów linii  $\mathcal{L}$  w ramach struktur o  $l_2$  i  $l_1$  obszarach stanów jednorodnych są identyczne (warunek (10.6)<sub>3</sub>).

Struktury pól elementarnych mogą degenerować się na dwa sposoby. Jeśli na  $\mathbf{K}$  zachodzi  $\mathcal{K}^{(l_1)} \cap \mathcal{K}^{(l_2)} \neq \emptyset$ , a dane warunki brzegowe  $\{\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, \kappa\}$  reprezentowane tu punktem  $\mathbf{B}^{(l_1)}(\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, |\kappa|)$  są tak dobrane, że  $\mathbf{B}^{(l_1)}(\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, |\kappa|) \in \mathcal{K}^{(l_2)}$  i równocześnie  $\mathbf{B}^{(l_1)} \in \mathcal{K}^{(l_1)}$ , to rozwiązania pola istnieją zarówno w ramach struktury o  $l_1$ , jak i o  $l_2$  obszarach. Pole o  $l_1 < l_2$  jest wtedy polem zdegenerowanym pola o  $l_2$  obszarach. Zwiększenie liczby obszarów z  $l_1$  do  $l_2$  lub jej zmniejszenie z  $l_2$  do  $l_1$  nie powoduje wówczas zarówno opuszczenia obszaru  $\mathcal{K}^{(l_1)}$ , jak i obszaru  $\mathcal{K}^{(l_2)}$ . Opisany przypadek dotyczy tzw. usuwalnej degeneracji struktury.

Dla pola o  $l_1$  obszarach i ustalonych warunkach brzegowych  $\{\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, \kappa\}$  zawsze można dobrać takie  $l_2 > l_1$ , że rozwiązania pola istnieją w ramach obu struktur.

Istnieją jednak przypadki szczególne, w których  $l_1$  i  $l_2$  nie mogą tworzyć pary dowolnych liczb naturalnych. Zachodzi wtedy równocześnie:

$$(12.1) \quad \mathbf{B} \notin \mathcal{K}^{(l_2)},$$

$$\mathbf{B} \in \mathcal{K}^{(l_1)} \quad (l_1 < l_2),$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \mathcal{K}^{(l_2)} \cap \mathbf{O}(\mathbf{B}, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Warunki (12.1) rozumiemy w ten sposób, że obszar  $\mathcal{K}^{(l_2)}$  posiada niepustą część wspólną z każdą kulą  $\mathbf{0}(\mathbf{B}, \varepsilon)$  o dowolnie małym promieniu  $\varepsilon$  i środkiem w punkcie  $\mathbf{B}$ , który to punkt należy do  $\mathcal{K}^{(l_1)}$ , ale nie należy do  $\mathcal{K}^{(l_2)}$ . Jeśli punkt  $\mathbf{B}^{(1)} \in \mathcal{K}^{(l_2)}$  spełnia (12.1), to przy warunkach brzegowych określonych jego współrzędnymi w przestrzeni  $\mathbf{K}$ , struktura pola o  $l_2$  obszarach ulega degeneracji istotnej (krótko: degeneracji).

W ramach uzupełnienia podanej definicji zauważmy, że:

1. Osobliwość strukturalna w sensie (12.1) dotyczy sytuacji, gdy zwiększenie liczby obszarów jednorodnych z  $l_1$  do  $l_2$  łączy się z nieistnieniem rozwiązania pola w ramach struktury o  $l_2$  obszarach.

2. Punkty  $\mathbf{B}$  o własnościach (12.1) mogą tworzyć (i tworzą) zbiory o wymiarze mniejszym od wymiaru obszaru  $\mathcal{K}^{(l_2)}$ .

3. Zgodnie z definicją obszarów typu  $(\mathcal{K}^{(l_2)})^*$  podaną w części II, punkt  $\mathbf{B}$ , który spełnia (12.1) należy do  $(\mathcal{K}^{(l_2)})^*$ ; mówimy, że jest on punktem osobliwym tego obszaru. Zbiory punktów  $\mathbf{B}$  o takich własnościach nazywamy zbiorami osobliwych warunków brzegowych. Dla osobliwych warunków brzegowych istnieją tylko rozwiązania o strukturach zdegenerowanych.

4. Zbiory punktów osobliwych obszarów  $(\mathcal{K}^{(l_2)})^*$  dopełniają  $\mathcal{K}^{(l_2)}$  do  $(\mathcal{K}^{(l_2)})^*$ .

Na podstawie podanych wniosków stwierdzamy, że degeneracja struktury pola może być utożsamiana z niespełnieniem warunków (10.6) i (10.7). Warunki te nie były dotąd uwzględniane. Zasadnicze cele tej części pracy muszą być zatem następujące:

a) zlokalizowanie położenia punktów i zbiorów punktów, w których aktywne stają się warunki (10.6) i (10.7),

b) ujawnienie i analizy efektów, jakie towarzyszą aktywności tych ograniczeń na płaszczyźnie fizycznej  $Y$ ,

c) wyprowadzenie wniosków, które pozwolą na metodyczne znajdowanie struktur pól elementarnych dla każdego ciągu wartości, jakie mogą przyjmować określone na brzegach parametry, całość prowadzonych badań i analiz została ukierunkowana na wykorzystanie w projektowaniu struktur pól o większym stopniu agregacji obszarów jednorodnych.

Aby te cele zrealizować należy rozważyć zadania z kompletnym zespołem warunków.

### 13. ZADANIA Z KOMPLETNYM ZESPOŁEM WARUNKÓW

W części II pokazano między innymi, że gdy odrzucić ograniczenia (10.6) oraz dopuścić rozwiązania, w których  $\omega = \omega^{(n+1)}$ , to zadania na wyznaczanie

obszarów istnienia rozwiązań pól elementarnych stają się zadaniami na określenie zewnętrznych oszacowań takich obszarów. W zamian, zadania wyjściowe udaje się sprowadzić do odpowiednich ciągów  $2^{l-2}$  zadań optymalizacji z nieliniowymi funkcjami kryterialnymi (10.10) oraz liniowymi i wypukłymi ograniczeniami (10.5)\*; są to zadania określone na przestrzeni  $\Omega$ , której wymiar jest mniejszy od wymiaru przestrzeni fizycznej  $Y$ .

Efekt ten został jednak osiągnięty kosztem:

a) eliminacji parametrów  $q \notin \Omega$ , czego rezultatem była utrata sprzężenia pomiędzy funkcjami (10.4) i warunkami (10.6),

b) utratą możliwości znajdowania punktów lub zbiorów punktów  $\mathbf{B}^{(1)}(\omega, |\kappa|)$  takich, dla których pola muszą zawierać mniejszą liczbę obszarów od pierwotnie założonej, to znaczy gdy ich struktury ulegają degeneracji.

Aby te sprzężenia przywrócić oraz badać rozwiązania dla warunków brzegowych określonych na zbiorach punktów osobliwych, rozważymy teraz zadania z kompletnym zespołem warunków (10.4), (10.5), (10.6). Zadania te rozwiązywano przede wszystkim numerycznie, jakkolwiek — w szczególnych przypadkach — stosowano także podejścia analityczne. W algorytmie, który posłużył do wyznaczania powierzchni ograniczających ostateczne obszary  $\mathcal{H}$  oraz do zlokalizowania zbiorów punktów osobliwych wykorzystano odpowiednie wzory i zależności podane w częściach I i II. „Działanie” tego algorytmu można naszkicować następująco:

a) przy zamrożonych na kroku  $\omega = c \in (0, \pi)$ ,  $\omega = c \in (0, \pi)$  oraz  $l = \text{const}$  wyznacza się podobszary  $(A_{1,l}^{n,n+1})^*$  ( $n = 1, 2, \dots, (l-1)$ );

b) generowane są wartości elementów ciągu

$$(13.1) \quad \omega_i^{(2)}, \omega_i^{(3)}, \dots, \omega_i^{(l-1)},$$

takie, że

$$(13.2) \quad (\omega_i^{(n)}, \omega_i^{(n+1)}) \in (A_{1,l}^{n,n+1})^* \quad (n = 1, 2, \dots, (l-1));$$

c) dla aktualnego ciągu  $\{\omega_i\}$  sprawdzane jest spełnienie warunków:

$$(13.3) \quad |\omega_i^{(n)} - \pi| > \varepsilon, \quad |\omega_i^{(n)}| > \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$(13.4) \quad |\omega_i^{(n+1)} - \omega_i^{(n)}| > \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots, (l-1));$$

d) jeśli spełnione są (13.3) i (13.4), to dla każdego ciągu parametrów rodzin  $Q = 1, 2$  ( $n = 1, 2, \dots, (l-1)$ ) oblicza się ((3.4)<sub>2</sub>, (10.4), (10.9), (10.10))

$$(13.5) \quad x_{d,i} = \sum_{n=1}^{l-1} (-1)^{Q+1} \tilde{\phi}^{(n)}(\omega_i, \omega_i^{(n+1)}), \quad (d = 1, 2, \dots, 2^{l-1}),$$

a następnie sprawdza, czy spełnione są warunki (10.6); kolejne wartości indeksu  $d$  są tu związane z każdym ciągiem wartości parametrów  $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(l-1)}$ ; ponieważ warunki (10.6) nie mogą być prosto wyrażane za pomocą  $Q^{(n)}$  (por. 10.2) – ustalono przyporządkowanie (por. 3):

$$(13.6) \quad q^{(n)} = \begin{cases} 1, 3 & \text{dla } Q^{(n)} = 1 \\ 2, 4 & \text{dla } Q^{(n)} = 2. \end{cases}$$

e) jeśli dla aktualnego ciągu wartości parametrów naprężeniowych

$$(13.1)^* \quad \omega_i^{(1)} = c, \omega_i^{(2)}, \omega_i^{(3)}, \dots, \omega_i^{(l-1)}, \omega_i^{(l)} = c$$

istnieje chociaż jeden taki ciąg  $\{q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(l-1)}\}$ , dla którego spełnione są warunki (13.3), (13.4) i (10.6), to zakłada się, że dla związanej z tym ciągiem wartości indeksu  $d^*$  ( $d^* = 1, 2, \dots, 2^{l-1}$ ) zachodzi

$$\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*, i}^{(l)}) \in \mathcal{K};$$

w ogólności otrzymuje się tu zbiór punktów  $\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*, i}^{(l)})$  odpowiadający różnym wartościom  $d^*$ ;

f) opisana procedura jest następnie powtarzana dla ciągu

$$(13.7) \quad \omega_{i+1}^{(1)} = c, \omega_{i+1}^{(2)}, \omega_{i+1}^{(3)}, \dots, \omega_{i+1}^{(l-1)}, \omega_{i+1}^{(l)} = c$$

i jeśli również dla tego ciągu spełnione są warunki (13.3), (13.4), (10.6), to tworzony jest zbiór punktów  $\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*, i+1}^{(l)})$ ;

g) jeśli dla ciągów (13.1) i (13.7) spełnione są warunki

$$(13.8) \quad (\omega_{i+1}^{(n+1)} - \omega_{i+1}^{(n)}) (\omega_i^{(n+1)} - \omega_i^{(n)}) > 0 \quad (n = 1, 2, \dots, (l-2))$$

oraz

$$(\omega_{i+1}^{(l-1)} - \omega_{i+1}^{(l)}) (\omega_i^{(l-1)} - \omega_i^{(l)}) > 0,$$

to dla każdego  $\beta \in [0, 1]$  i wyznaczonych  $d^*$  zachodzi:

$$\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*}^{(l)}) = \beta \mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*, i}^{(l)}) + (1 - \beta) \mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*, i+1}^{(l)}) \in \mathcal{K};$$

punkty  $\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*, i}^{(l)})$  i  $\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*, i+1}^{(l)})$  są zatem końcami przedziałów, wewnątrz których funkcja  $\kappa_{d^*}$  jest ciągła; warunki (13.8) przedstawiają żądanie,

by sąsiednie ciągi obrazów  $P(\omega_i, \omega_i^{(n)})$  i  $P(\omega_{i+1}, \omega_{i+1}^{(n)})$  w przestrzeni  $\Omega$  leżały po tej samej stronie prostej  $\omega^{(n+1)} = \omega^{(n)}$ ; jest to linia nieciągłości obszaru  $A$ ;

h) zbiory  $\{\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*,i})^{(1) (0)}\}$ ,  $\{\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*,i+1})^{(1) (0)}\}$  są wyznaczane w obszarze najniższej pętli i przechowywane w pamięci operacyjnej; po wykonaniu tej pętli, przedziały:

$$[\mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*,i})^{(1) (0)}, \mathbf{B}(\omega, \omega, \kappa_{d^*,i+1})^{(1) (0)}]$$

— jeśli mają części wspólne — są sumowane; procedury te są powtarzane dla wszystkich ciągów typu (13.1) i (13.7) wygenerowanych przez algorytm w podobzarze  $(A_{1,i}^{n,n+1})^*$ ; zakłada się, że otrzymane w ten sposób zbiory początków i końców przedziałów ciągłości są punktami poszukiwanych powierzchni, które ograniczają  $\mathcal{K}^{(0)}$ ;

i) w przyjętej realizacji algorytmu założono, że parametry  $\omega$  są zmieniane w pętlach zhierarchizowanych w ten sposób, że pętle zmian  $\omega^{(n)}$  są nadrzędnymi nad pętlami zmian  $\omega^{(n+1)}$  ( $n = 2, 3, \dots, (l-1)$ ); zakłada się ponadto, że  $\omega^{(0)} = \alpha - \omega^{(1)}$ ;  $\alpha = \text{const}$  jest płaszczyzną przekroju obszaru  $\mathcal{K}^{(0)}$ .

W uzupełnieniu warto dodać, że:

1) podany algorytm nie akceptuje nie tylko rozwiązań, które nie spełniają warunków (10.4)–(10.6), ale także rozwiązań, przy których parametr  $\kappa$  jest nieokreślony (por. (13.3), (13.4));

2) skonstruowana procedura sumowania przedziałów operuje na zmiennych typu real; mimo to jest bardzo szybka;

3) wyznaczone zbiory punktów powierzchni ograniczających  $\mathcal{K}^{(0)}$  zapisuje się na dysku, a następnie porównuje z odpowiednimi zbiorami wyznaczonymi z rozwiązania zadań (10.4), (10.5)\*; pozwala to zlokalizować obszary aktywności warunków (10.6), (10.7);

4) w algorytmie przyjęto kryterium istnienia rozwiązania przedstawione w punkcie (10.3); kwestia istnienia dopuszczalnych przedłużeń pól nie jest rozważana.

Identyfikację typu ograniczenia, a następnie badania efektów towarzyszących jego aktywności na płaszczyźnie fizycznej  $Y$  prowadzono za pomocą osobnego pakietu programów. Służyły one wyłącznie do badania otoczeń

zbiorów punktów osobliwych obszarów  $(\mathcal{K}^{(0)})^*$ . Procedury zawarte w tych programach pozwalały także znajdować takie punkty  $\mathbf{B}$ , dla których istnieją wyłącznie rozwiązania odpowiadające nieokreślonej geometrii układu linii

$\mathcal{L}^{n,n+1}$ ; jeden lub równocześnie kilka elementów ciągu (13.1) przyjmuje wtedy wartości 0 lub  $\pi$ .

Niżej zestawiamy ważniejsze wyniki takich badań oraz najbardziej charakterystyczne sytuacje na płaszczyźnie fizycznej  $Y$ . Otrzymane rezultaty posłużą potem do wyprowadzenia ogólniejszych reguł projektowania struktur linii nieciągłości naprężeń.

14. ANALIZY ROZWIĄZAŃ PÓL ELEMENTARNYCH O OSOBLIWYCH STRUKTURACH

14.1. Zbiory punktów osobliwych obszaru  $(\mathcal{K})^{(3)*}$  oraz odpowiadające im rozwiązania pól elementarnych.

Zbiory te obejmują:

- a) odcinki prostych oznaczone na rys. 14a cienkimi liniami kropkowymi,
- b) powierzchnię obszaru  $\mathcal{K}^{(2)}$ , która jest powierzchnią nieciągłości obszaru

$\mathcal{K}^{(3)}$ .

Na tych zbiorach aktywne są, odpowiednio, warunki (10.6) i (10.7).

Dla warunków brzegowych, które odpowiadają punktom  $\mathbf{B}$  położonym na płaszczyznach  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi$ ,  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi$ , rozwiązania pól na ogół istnieją. Nie są jednak określone i nie będziemy ich wyróżniali. Z założenia wyróżnimy tylko te rozwiązania nieokreślone, które dla danych warunków brzegowych stanowią jedyne rozwiązania dopuszczalne.

Pozostałe brzegi obszarów  $\mathcal{K}^{(3)}$  i  $(\mathcal{K})^{(3)*}$  są identyczne.

14.1.1 Odcinki prostych  $\{(\omega, \omega, |\kappa|); \omega = 0, |\kappa| = \pi, \omega \in (0, \pi), n = 1, 3\}$ .

Pola o trzech obszarach jednorodnych, dla których zachodzi  $\omega = \omega$ , są zwykle nazywane symetrycznymi. Wyróżniają się one największym dopuszczalnym zakresem zmienności modułu parametru  $\kappa$ . Obejmuje on przedział otwarty  $(0, \pi)$ . Własność ta, dobrze widoczna na rys. 14a, ujawniała się zresztą już wcześniej, m.in. podczas analiz obszarów  $A_1^{n,n+1}$  przedstawionych w części I.

Na rozważanym odcinku prostej aktywne są warunki typu (11.3). Charakterystyczne jest tu m.in. to, że jeśli jest spełniony warunek  $\Theta \neq \pi$  ((11.3)<sub>3</sub>), to nie są spełnione warunki  $\Theta > 0$  ((11.3)<sub>1</sub>),  $\Theta < 2\pi$  ((11.3)<sub>2</sub>) i odwrotnie. Dokładniej mówiąc, jedna lub druga sytuacja ma miejsce zależnie od wartości, jakie

przyjmują parametry  $q$ ,  $q$ . Parametr  $\omega$  przyjmuje wartości zależnie od przedziałów, w których zawierają się  $\omega = \omega$ . I tak:

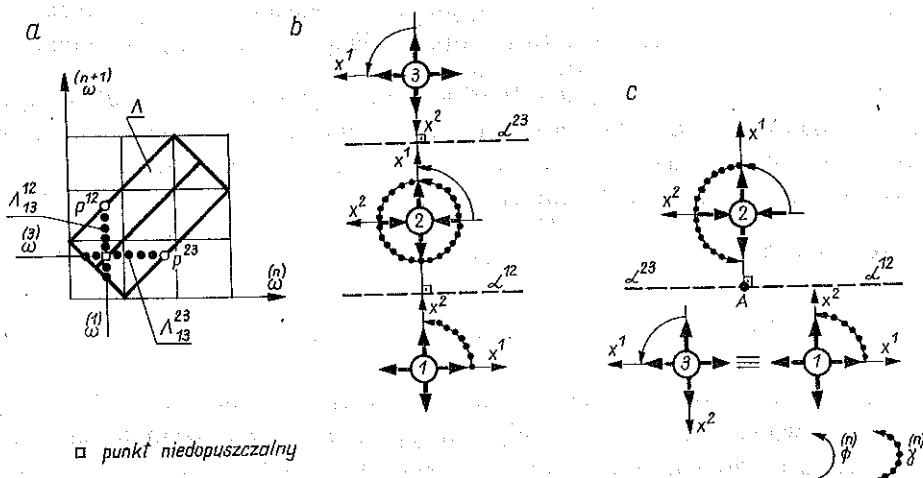
$$\text{dla } \omega \in \left(0, \frac{1}{3}\pi\right): \quad \omega = \omega + \frac{1}{3}\pi \quad (\omega = \sup \Gamma_{1,1});$$

$$\text{dla } \omega \in \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right): \quad \omega = \omega \pm \frac{1}{3}\pi \quad (\omega = \sup \Gamma_{13} \text{ lub } \omega = \inf \Gamma_{13});$$

$$\text{dla } \omega \in \left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right): \quad \omega = \omega - \frac{1}{3}\pi \quad (\omega = \inf \Gamma_{13});$$

Zwróćmy uwagę, że obrazy  $P(\omega, \omega)$  linii  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  układają się wówczas na tych brzegach obszaru  $A$ , gdzie  $\hat{\phi}(\omega, \omega) = \hat{\phi}(\omega, \omega) = \frac{\pi}{2}$  (por. rys. 17a i rys. 2).

Widoczne jest także, iż warunki  $\omega \neq \omega$  ( $n = 1, 2$ ) są tu zawsze spełnione.



Rys. 17. Przykład ilustrujący degenerację struktury pola o trzech obszarach dla warunków brzegowych określonych na zbiorze:

$$\{(\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega, \quad \omega \in (0, \pi), \quad \omega \in (0, \pi), \quad |\kappa| = \pi\}$$

a) podobzary  $A_{1,3}^{n,n+1}$  i położenie obrazów  $P(\omega, \omega)$  ( $n = 1, 2$ ),

b) rozwiązanie  $\{\omega = 50^\circ, \omega = 110^\circ, \omega = 50^\circ, q = 1, q = 4\}$ ,

c) rozwiązanie  $\{\omega = 50^\circ, \omega = 110^\circ, \omega = 50^\circ, q = 1, q = 2\}$ ,



Interesujące są rozwiązania, które odpowiadają krańcom wymienionych przedziałów. M. in. dla  $\omega = \frac{1}{3}\pi$ , zgodnie z podanymi wyżej zależnościami,

otrzymuje się  $\omega = 0$  lub  $\omega = \frac{2}{3}\pi$ . Przy  $\omega = 0$ , obrazy  $P(\omega, \omega)$  i  $P(\omega, \omega)$  leżą

w wierzchołkach obszaru  $A$ . Parametry  $\hat{\phi}(\omega, \omega)$  i  $\hat{\phi}(\omega, \omega)$  nie są tam określone. Nieokreślony<sup>(1)</sup> jest więc także parametr  $\kappa$ . Jeśli przyjąć, że  $|\kappa| = \pi$ , jak to ma miejsce na rozważanym odcinku prostej, to otrzymamy  $\Theta = 0$  lub

$\Theta = \pi$ , a więc w istocie jedną tylko linię nieciągłości naprężeń zamiast założonych tu z góry dwóch linii. Analogiczna sytuacja powstaje dla  $\omega = \frac{2}{3}\pi$

z tym, że wtedy  $\omega = \pi$ . Wymienione punkty nie należą więc do  $\mathcal{K}$ , lecz do  $\mathcal{K}$ .

Podane wyżej ciągi wartości parametrów  $\omega$  ( $n = 1, 2, 3$ ) odpowiadają dość charakterystycznym sytuacjom na płaszczyźnie fizycznej  $Y$ . W ilustrujących je przykładach, pokazanych na rys. 17b,c, przyjęto  $\omega = 50^\circ$ ,  $\omega = 50^\circ$ ;  $\kappa = \pi$  ( $\Rightarrow \omega = 110^\circ$ ). Widzimy tutaj, że zarówno w przypadku b), jak i w przypadku c) — linie nieciągłości naprężeń  $\mathcal{L}^{12}$  i  $\mathcal{L}^{23}$  są równoległe. W rezultacie:

w polu z rys. 17b (przyjęto  $q = 1$ ,  $q = 4$ ) nie jest spełniony warunek (11.3)<sub>1</sub>, który wymaga, by  $\Theta > 0$ ; nie ma więc fizycznego miejsca dla obszaru pośredniego 2; gdyby złożyć obie linie nieciągłości naprężeń w jedną, to rozdzielałaby ona dwa identyczne stany jednorodnego w obszarach 1 i 3 nie tworząc rzeczywistej linii nieciągłości naprężeń — pole stałoby się jednorodne;

w polu z rys. 17c (założono  $q = 1$ ,  $q = 2$ ) otrzymuje się  $\Theta = \pi$ ; nie jest zatem spełniony warunek (11.3)<sub>3</sub>; linie  $\mathcal{L}^{12}$  i  $\mathcal{L}^{23}$  tworzą tu w istocie jedną tylko linię nieciągłości naprężeń, na której w sposób sztuczny naniesiono węzeł  $A$ ; obszary 1 i 3 są identyczne i zajmują to samo pole płaszczyzny fizycznej  $Y$ ; mamy więc do czynienia z degeneracją pierwotnie założonej struktury pola do pola złożonego z dwóch obszarów jednorodnych; ponieważ przypadek ten ma duże znaczenie praktyczne dla rozwiązywania pól bardziej złożonych — rozważymy go dokładniej w punkcie 14.1.

Należy pokreślić, że w otoczeniach rozważanych prostych, które należą do  $\mathcal{K}$  — rozwiązania pola o trzech obszarach istnieją: moduł parametru  $\kappa$  zdąża do  $\pi$ , chociaż tej wartości osiągnąć nie może.

<sup>(1)</sup> W punkcie tym rozwiązanie istnieje chociaż geometria układu linii  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  nie jest określona.

Dodatkowo warto także zwrócić uwagę na sens fizyczny warunków (11.3). Wykluczają one rozwiązania, które by się realizowały w kilku warstwach tej samej płaszczyzny fizycznej  $Y$ , łącznie z przypadkiem skrajnym, gdy układ linii nieciągłości naprężeń ulega degeneracji. Takie wzajemne uzupełnianie się lub nakładanie warunków ma miejsce przy szczególnych warunkach brzegowych, nie mniej podczas badań obszarów istnienia rozwiązań jest spotykane dość często. Przyczyna powstawania tego efektu jest dość oczywista: jeśli nie są spełnione warunki  $\omega \neq \omega^{(n)}$ , to automatycznie nie są także spełnione warunki (11.3). Stwierdzenie odwrotne nie jest na ogół prawdziwe i w tym m.in. przejawia się pewna nadrzędność warunków  $P(\omega, \omega^{(n)}) \in A_{1,1}^{n,n+1}$  (w tym:  $\omega \neq \omega^{(n)}$ ) nad warunkami geometrycznej konstrukcji pola na płaszczyźnie  $Y$ .

14.1.2. Odcinki prostych:  $\{(\omega, \omega^{(n)} | \kappa): \omega = \omega^{(n)}, \kappa = 0, \omega \in (0, \pi), n = 1, 3\}$ .

Tak samo jak w przypadku omówionym poprzednio, aktywne są tu warunki typu (11.3). Mamy więc także sytuacje, w których — wymiennie — albo nie jest spełniony warunek  $\Theta \neq \pi$  ((11.3)<sub>3</sub>), albo niespełnione są równocześnie warunki  $\Theta > 0$  ((11.3)<sub>1</sub>) i  $\Theta < 2\pi$  ((11.3)<sub>2</sub>). Istotna różnica polega tylko na tym, że niespełnienie warunków (11.3) zachodzi dla każdej wartości parametru  $\omega \in \Gamma_{1,3}$ .

Warunki  $\omega \neq \omega^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ) są tu spełnione prawie zawsze, z wyjątkiem przypadków, gdy  $\omega = \omega^{(n)} = \frac{1}{6}\pi$  oraz  $\omega = \omega^{(n)} = \frac{5}{6}\pi$ . W tych przypadkach aktywne są zarówno warunki  $\omega \neq \omega^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ), jak i warunki (11.3).

14.1.3. Pozostałe zbiory punktów osobliwych. Rozważamy odcinki prostych:

$$a) \{(\omega, \omega^{(n)} | \kappa): \omega = -\omega^{(n)} + \frac{1}{3}\pi, \kappa = 0, \omega \in (0, \pi), n = 1, 3\},$$

$$b) \{(\omega, \omega^{(n)} | \kappa): \omega = -\omega^{(n)} + \frac{5}{3}\pi, \kappa = 0, \omega \in (0, \pi), n = 1, 3\},$$

$$c) \{(\omega, \omega^{(n)} | \kappa): \omega = \omega^{(n)} \pm \frac{1}{3}\pi, \kappa = \frac{1}{2}\pi, \omega \in (0, \pi), n = 1, 3\}.$$

Są to te brzegi powierzchni  $\mathcal{K}$ , na których określony jest parametr  $\hat{\phi}$ . W każdym przypadku warunków brzegowych, które odpowiadają punktom wewnętrznym tych odcinków stwierdza się niespełnienie warunków  $\omega \neq \omega^{(n)}$ .

W punktach  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\varkappa|) = \mathbf{B}\left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \varkappa = 0\right)$  oraz  $\mathbf{B}\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \varkappa = 0\right)$  nie są również spełnione warunki (11.3).

Otrzymany tu wynik badań jest zgodny z bardziej ogólnym rezultatem, który przedstawiamy dalej, i który pokazuje, że nie tylko wymienione brzegi, ale cała powierzchnia  $\mathcal{K}$  nie należy do  $\mathcal{K}$ . Do  $\mathcal{K}$  nie należy zatem  $\mathcal{K}$  łącznie z brzegiem tej powierzchni.

14.1.4. Powierzchnia nieciągłości obszaru  $\mathcal{K}$ . Jeśli  $\omega, \omega, \varkappa$  będą akurat tak

dobrane, że  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\varkappa|) \in \mathcal{K}$ , to  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\varkappa|) \notin \mathcal{K}$  i odwrotnie. Pole, w którym pierwotnie przyjęto 3 obszary jednorodnie degeneruje się wtedy do pola o dwóch obszarach. Zbiór powierzchniowy  $\mathcal{K}$  jest powierzchnią nieciągłości obszaru  $\mathcal{K}$ .

Wynik ten, otrzymany najpierw na drodze analitycznej, a także dobrze widoczny w badaniach numerycznych (zadania z kompletnym zespołem ograniczeń), jest dość nieoczekiwany i równocześnie na tyle interesujący, że przedstawimy go dokładnie.

Dwa obszary stanów jednorodnych 1 i 3 można rozdzielić jedną linią nieciągłości naprężeń tylko w przypadku, gdy  $\omega, \omega, \varkappa$  zostaną akurat tak dobrane, że zachodzą warunki:

$$(14.1) \quad (\omega, \omega) \in \mathcal{A},$$

$$|\varkappa| = \hat{\phi}(\omega, \omega).$$

Równość (14.1)<sub>2</sub> wynika z (3.2), a obydwa warunki (14.1) łącznie są równoważne warunkowi:  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\varkappa|) \in \mathcal{K}$ .

Dla dowolnej trójki liczb  $\omega, \omega, \varkappa$  (z ich dziedziny), konstrukcja jednej tylko linii  $\mathcal{L}$  nie jest zatem dopuszczalna.

Pytamy, czy dla warunków brzegowych, które spełniają (14.1), możliwe jest także zbudowanie pola, w którym obszary 1 i 3 będą rozdzielone dwiema liniami  $\mathcal{L}^{12}$  i  $\mathcal{L}^{23}$ , a więc i obszarem pośrednim 2.

Otóż, zgodnie z podanym na początku wnioskiem, odpowiedź okazuje się negatywna. Można to wykazać m.in. analitycznie wychodząc z (11.1), (11.2) lub z zależności im równoważnych. Dla rozważanego przypadku otrzymamy na przykład zadanie (por. (11.2), (11.4)):

$$\binom{(1)}{\omega}, \binom{(2)}{\omega} \in A, \quad \binom{(2)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega} \in A, \quad \binom{(1)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega} \in A,$$

(14.2)

$$\pm \tilde{\phi} \binom{(1)}{\omega}, \binom{(2)}{\omega} \pm \tilde{\phi} \binom{(2)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega} = \pm \tilde{\phi} \binom{(1)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega},$$

które należy rozwiązać względem  $\binom{(2)}{\omega}$ . Związki (14.2)<sub>4</sub> można przedstawić w sposób równoważny także za pomocą  $\hat{\phi} \binom{(n)}{\omega}, \binom{(n+1)}{\omega}$  (por. (14.1)). Przekształcając odpowiednio (14.2)<sub>4</sub> dochodzimy do wielomianu trygonometrycznego 4 stopnia względem  $\cos \binom{(2)}{\omega}$ . Jego współczynniki są bardzo złożonymi funkcjami parametrów  $\binom{(1)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega}$  i dlatego nie będziemy ich przytaczali. Dodamy tylko, że ów wielomian ma w obszarze dopuszczalnym miejsca zerowe tylko wtedy, gdy  $\binom{(1)}{\omega} = \binom{(2)}{\omega}$  lub  $\binom{(2)}{\omega} = \binom{(3)}{\omega}$ . Pomiedzy obszarami, odpowiednio, 1 i 2 lub 2 i 3 nie tworzą się wówczas linie nieciągłości naprężeń.

Poprawność podanego wniosku jest także dość łatwa do sprawdzenia za pomocą rys. 9a. Dla  $\binom{(2)}{\omega} = \binom{(1)}{\omega}$  ( $P \binom{(1)}{\omega}, \binom{(2)}{\omega} \notin A$ , na rysunku oznaczono  $\square$ ), obraz  $P \binom{(2)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega}$  ( $\square$ ) leży w punkcie przecięcia  $A_{1,3}^{1,2}$  i  $A_{1,3}^{2,3}$ , to znaczy w punkcie  $P \binom{(1)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega}$  ( $\square$ ). Zwróćmy uwagę, że obraz  $P \binom{(1)}{\omega}, \binom{(2)}{\omega}$  zajmie to położenie dokładnie wówczas, gdy  $\binom{(2)}{\omega} = \binom{(3)}{\omega}$  ( $P \binom{(2)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega} \notin A$ ,  $\square$ ).

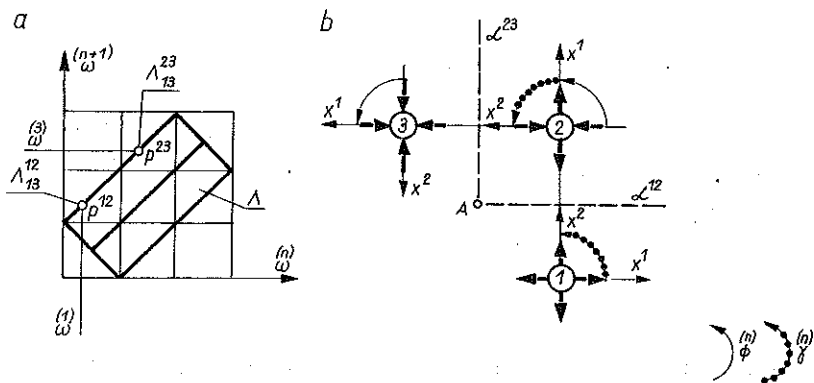
Podany wniosek ma własność symetrii. Dla potrzeb praktycznych można go również sformułować następująco:

Jeśli dwa jednorodne stany naprężeń 1, 3 można rozdzielić dopuszczalnym układem dwóch linii nieciągłości  $\mathcal{L}^{12}$ ,  $\mathcal{L}^{23}$ , który na płaszczyźnie fizycznej wydziela obszar pośredni 2, to niemożliwe jest dopuszczalne rozdzielanie tych stanów jedną tylko linią  $\mathcal{L}^{13}$  i odwrotnie.

14.1.5. Wybrane zbiory brzegowe obszaru  $\mathcal{X}^{(3)}$ . W tym miejscu dodatkowo omówimy własności rozwiązań, jakie otrzymuje się dla warunków brzegowych określonych na zbiorach:

$$\{(\binom{(1)}{\omega}, \binom{(3)}{\omega}, |\kappa|): \binom{(3)}{\omega} = \binom{(1)}{\omega} \pm \frac{2}{3} \pi, \binom{(n)}{\omega} \in (0, \pi), |\kappa| = \pi \text{ lub } \kappa = 0, n = 1, 2\},$$

a uczynimy to, mimo że dla warunków brzegowych struktury pól o trzech obszarach nie ulegają degeneracji. Z wyprowadzonych tu wniosków skorzystamy podczas analiz zbiorów punktów osobliwych obszaru  $(\mathcal{X}^{(4)})^*$ .



Rys. 18. Przykład ilustrujący rozwiązanie pola o trzech obszarach dla warunków brzegowych określanych na zbiorze

$$\{(\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega \pm \frac{2}{3}\pi, \quad \omega \in (0, \pi), \quad \omega \in (0, \pi), \quad |\kappa| = \pi\}$$

a) podobzary  $\Lambda_{1,3}^{n,n+1}$  i położenie obrazów  $P(\omega, \omega)$  ( $n = 1, 2$ ),  $\Lambda_{1,3}^{n,n+1}$  degenerują się do punktów na  $\delta\Lambda$ ,

b) rozwiązanie  $\{\omega = 20^\circ, \quad \omega = 80^\circ, \quad \omega = 140^\circ, \quad q = 1, \quad q = 1\}$

Dla pól, które spełniają warunki brzegowe określone na wymienionych zbiorach punktów charakterystyczne jest m.in. to, że:

obrazy  $P(\omega, \omega)$ ,  $P(\omega, \omega)$  leżą na brzegach obszaru  $\Lambda$  (rys. 18a) i układają się zawsze na tym samym odcinku brzegowym: górnym  $\omega = \omega + \frac{\pi}{3}$  lub dolnym  $\omega = \omega - \frac{\pi}{3}$  ( $n = 1, 2$ ); oznacza to, że zachodzi

$$\hat{\phi}(\omega, \omega) = \hat{\phi}(\omega, \omega) = \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\text{albo } \hat{\gamma}(\omega, \omega) = 0 \quad \text{i} \quad \hat{\gamma}(\omega, \omega) = 0,$$

$$\text{albo } \hat{\gamma}(\omega, \omega) = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \hat{\gamma}(\omega, \omega) = \frac{\pi}{2};$$

obydwa te ciągi parametrów  $\hat{\gamma}(\omega, \omega)$  ( $n = 1, 2$ ) dają analogiczny efekt na płaszczyźnie fizycznej  $Y$ ;

podobzary  $\Lambda_{1,3}^{n,n+1}$  ( $n = 1, 2$ ) degenerują się do punktów (rys. 16a); na rozważanym brzegu jest zatem aktywny warunek (10.5)\*.

Typową sytuację na płaszczyźnie fizycznej  $Y$ , która ilustruje omawiane przypadki, pokazano na rys. 18b. W przykładzie założono:  $\omega = 20^\circ$ ,  $\omega = 140^\circ$  ( $\Rightarrow \omega = 80^\circ$ ). Widoczne jest, że warunki (11.3) są tu spełnione. Na płaszczyźnie fizycznej można więc zbudować pole o trzech obszarach, dla którego  $|\kappa| = \pi$ .

#### 14.2. Zbiory punktów osobliwych obszaru $(\mathcal{K})^*$

Powierzchnia  $\max |\kappa(\omega, \omega)|$ , która ogranicza od góry obszar  $\mathcal{K}$ , jest już znacznie prostsza od przedstawionej w punkcie poprzednim, chociaż także i na niej, jak również na  $\min |\kappa(\omega, \omega)| = 0$ , znajdują się zbiory punktów wiążące się z osobliwościami struktur. Spotykamy tu także izolowane punkty, w których rozwiązania nie są określone. Poniżej przedstawiamy charakterystyczne sytuacje, jakie temu towarzyszą na płaszczyźnie fizycznej  $Y$  oraz w przestrzeni parametrycznej  $\Omega$ .

14.2.1. Odcinki prostych:  $\{(\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega, \omega \in (0, \pi), \omega \in (0, \pi), |\kappa| = \pi$  lub  $\kappa = 0\}$ . Własnością charakterystyczną rozwiązań, jakie otrzymuje się dla warunków brzegowych określonych na tym zbiorze jest równość przynajmniej jednej z par parametrów naprężeniowych w sąsiednich obszarach stanów jednorodnych. Pojawienie się równości  $\omega = \omega$  oznacza degenerację złożonej struktury pola do pola o co najwyżej trzech obszarach jednorodnych. W rozważanym przypadku są to pola symetryczne.

Przypadek taki był omawiany podczas analiz obszaru  $\mathcal{K}$  (dla  $\{(\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega, \omega \in (0, \pi), \omega \in (0, \pi), |\kappa| = \pi$  lub  $\kappa = 0\}$ ). Okazało się, że w rzeczywistości mamy wtedy do czynienia nie z polem o trzech lecz o dwóch obszarach jednorodnych. Odcinki prostych

$$\{(\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega, \omega \in (0, \pi), \omega \in (0, \pi), |\kappa| = \pi \text{ i } \kappa = 0\}$$

nie należą zatem ani do  $\mathcal{K}$ , ani nawet do  $\mathcal{K}$ . Fakt ten łatwo jest zilustrować poglądowym rysunkiem, zestawiając górne powierzchnie obszarów  $\mathcal{K}$  i  $\mathcal{K}$  w jednym układzie współrzędnych. Wspomniane powierzchnie, a właściwie powierzchnie obszarów  $(\mathcal{K})^*$  i  $(\mathcal{K})^*$ , są styczne wzdłuż wspomnianych odcinków.

Stwierdzamy zatem, że w przypadku pola symetrycznego nie można otrzymać rozwiązania, które by pozwalało osiągać  $|\varkappa| = \pi$  lub  $\varkappa = 0$  w ramach struktur o trzech lub czterech obszarach jednorodnych. Wniosek ten jest bardzo ważny dla analiz struktur układów linii nieciągłości naprężeń, jakie tworzą się wokół izolowanego węzła linii  $\mathcal{L}$  w polach złożonych.

14.2.2. *Odcinki prostych*:  $\{(\omega, \omega, |\varkappa|): \omega = \omega \pm \frac{2}{3}\pi, |\varkappa| = \pi,$

$\omega \in (0, \pi), n = 1, 4\}$ . Rozwiązania pól dla warunków brzegowych okreś-

lonych na tych odcinkach także cechują się równością przynajmniej jednej pary parametrów naprężeniowych w obszarach sąsiednich. Z analiz przedstawionych w punkcie poprzednim wiadomo już jednak, że ziory:

$$\{(\omega, \omega, |\varkappa|): \omega = \omega \pm \frac{2}{3}\pi, |\varkappa| = \pi, \omega \in (0, \pi), n = 1, 2\} \subset \mathcal{K}.$$

Mamy tu więc do czynienia z degeneracją struktury pola do pola, które zawiera trzy obszary jednorodne.

Należy podkreślić, że w odróżnieniu od sytuacji omówionej w podpunkcie poprzednim  $(\omega = \omega)$ , dla warunków brzegowych określonych na odcinkach

$$\{(\omega, \omega, |\varkappa|): \omega = \omega \pm \frac{2}{3}\pi, \varkappa = 0, \omega \in (0, \pi), n = 1, 2, 3\},$$

rozwiązania pól o czterech obszarach istnieją.

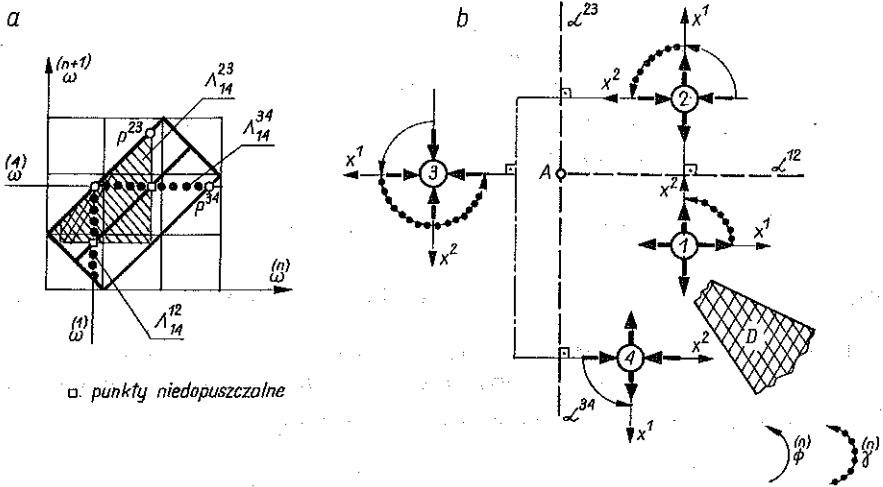
14.2.3. *Zbiory brzegowe*:  $\{(\omega, \omega, |\varkappa|): \omega = \omega \pm \frac{\pi}{3}, |\varkappa| = \frac{3}{2}\pi, \omega \in (0, \pi), n = 1, 4\}$ . Dość nieoczekiwanie okazało się, że dla warunków brzegowych określonych na tych zbiorach rozwiązania na ogół istnieją i są określone za

wyjątkiem punktów  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\varkappa|)$ , gdzie odcinek ten przebija płaszczyznę  $\omega + \omega = \pi$ . Dla tych punktów  $\mathbf{B}$  istnieją tylko rozwiązania nieokreślone.

Rozwiązania wyznaczone dla rozważanych obecnie warunków brzegowych wyróżniają się dwoma charakterystycznymi ciągami wartości parametrów naprężeniowych:

a) dla przedziału  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  i  $\omega = \omega + \frac{\pi}{3}$  otrzymujemy

$$\omega = \omega + \frac{\pi}{3}, \quad \omega = \omega + \frac{\pi}{3}, \quad \omega = \omega - \frac{\pi}{3} \quad (\omega = \omega);$$



Rys. 19. Rozwiązanie pola o czterech obszarach dla przypadku a) warunków brzegowych (oznaczonych w tekście), określonych na zbiorze

$$\left\{ (\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega \pm \frac{\pi}{3}, \quad \omega \in (0, \pi), \quad \omega \in (0, \pi), \quad |\kappa| = \frac{3}{2}\pi \right\}$$

a) podobszary  $\Lambda_{1,4}^{\pi, \pi+1}$  i położenie obrazów  $P(\omega, \omega^{(n)})$  ( $n = 1, 2, 3$ ),

b) rozwiązanie  $\left\{ \begin{matrix} (1) \\ \omega = 50^\circ, \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ \omega = 110^\circ, \end{matrix} \begin{matrix} (3) \\ \omega = 170^\circ, \end{matrix} \begin{matrix} (4) \\ \omega = 110^\circ. \end{matrix} \begin{matrix} (1) \\ q = 1, \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ q = 1, \end{matrix} \begin{matrix} (3) \\ q = 2 \end{matrix} \right\}$

(Uwaga: symbolem D oznaczono fizyczne miejsce na przedłużeniu pola

na przykład przy  $\omega = 50^\circ, \omega = 110^\circ$  (rys. 19) otrzymujemy rozwiązanie:

$\left\{ \omega = 50^\circ, \omega = 110^\circ, \omega = 170^\circ, \omega = 110^\circ, q = 1, q = 1, q = 2 \right\}$ , w którym

$\Theta = \frac{\pi}{2}, \Theta = \pi$ ; jak widać, rozwiązanie to istnieje mimo, że linie  $\mathcal{L}^{23}$  i  $\mathcal{L}^{34}$

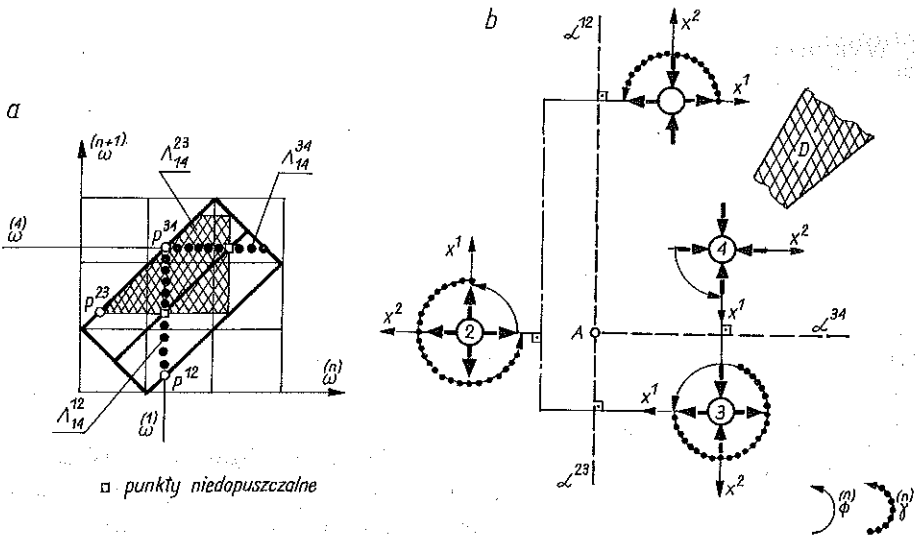
tworzą kąt  $\Theta = \pi$ ; warunek  $\Theta \neq \pi$  jest bowiem istotny tylko w przypadku pól o 3 obszarach jednorodnych;

dla podanego ciągu parametrów  $\omega^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) charakterystyczny jest także rozkład obrazów linii  $P(\omega, \omega^{(n)})$  pokazany na rys. 19a; układają się one na tych brzegach obszaru  $\Lambda$ , gdzie  $\hat{\phi}(\omega, \omega^{(n+1)}) = \frac{\pi}{2}$ ;

b) dla przedziału  $\omega \in \left( \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \right)$  i  $\omega = \omega + \frac{\pi}{3}$  otrzymamy odpowiednio:

$$\omega = \omega - \frac{\pi}{3}, \quad \omega = \omega + \frac{\pi}{3}, \quad \omega = \omega + \frac{\pi}{3}, \quad (\omega = \omega)$$





Rys. 20. Rozwiązanie pola o czterech obszarach dla przypadku b) warunków brzegowych (ozn. w tekście), określonych na zbiorze

$$\left\{ (\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega \pm \frac{\pi}{3}, \quad \omega \in (0, \pi), \quad \omega \in (0, \pi), \quad |\kappa| = \frac{3}{2}\pi \right\}$$

a) podobzary dopuszczalne  $\Lambda_{1,4}^{n,n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ ),

b) rozwiązanie  $\left\{ \begin{matrix} \omega = 70^\circ, & \omega = 10^\circ, & \omega = 70^\circ, & \omega = 130^\circ, & q = 2, & q = 3, & q = 3 \end{matrix} \right\}$

oraz rozwiązania, w których  $\Theta = \pi$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ; na rysunku 20 zilustrowano je przykładem, w którym założono  $\omega = 70^\circ$ ,  $\omega = 130^\circ$  i otrzymano:

$$\left\{ \omega = 70^\circ, \quad \omega = 10^\circ, \quad \omega = 70^\circ, \quad \omega = 130^\circ, \quad q = 2, \quad q = 3, \quad q = 3 \right\};$$

charakterystyczny dla rozważanego przedziału układ obrazów linii  $P(\omega, \omega)$  pokazano na rys. 20a.

Dla  $\omega = \frac{\pi}{3}$  i  $\omega = \omega + \frac{\pi}{3}$  otrzymujemy rozwiązania, w których kąt  $\kappa$  jest nieokreślony. W obszarach wewnętrznych 2 i 3 otrzymuje się wtedy albo  $\omega = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\omega = \pi$ , albo  $\omega = 0$ ,  $\omega = \frac{\pi}{3}$ . Ów punkt nieokreśloności jest punktem izolowanym na powierzchni  $(\mathcal{K})^*$ .

Analogiczne sytuacje napotkamy na symetrycznym zbiorze punktów, to znaczy, gdy  $\omega = \omega - \frac{\pi}{3}$  (por. rys. 16).

(i)

15. WYKORZYSTANIE WŁASNOŚCI OBSZARÓW  $\mathcal{K}$  W ANALIZACH STRUKTUR PÓŁ  
ELEMENTARNYCH I NAJPROSTSZYCH PÓŁ ZŁOŻONYCH

15.1. *Kwestia istnienia rozwiązań w  $\mathcal{K}$  jeśli istnieją rozwiązania w  $\mathcal{K}$  i  $\mathcal{K}$ .*

Podczas analiz zbiorów punktów osobliwych obszaru  $(\mathcal{K})^*$  (p. 14.1) stwierdzono, że jeśli  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|) \in \mathcal{K}$ , to dla tych samych warunków brzegowych nie istnieje rozwiązanie pola, które by zawierało 3 obszary jednorodne. W tych przypadkach zawsze następuje degeneracja założonej struktury do struktury złożonej z dwóch obszarów. Prawdziwe okazało się także stwierdzenie odwrotne: nie można zbudować pola o dwóch obszarach jednorodnych, o ile jego rozwiązanie istnieje w ramach struktury, która zawiera trzy obszary.

W tej sytuacji ważna staje się odpowiedź na pytanie, czy podobny efekt powstaje również w przypadkach, gdy punkty  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|)$  należą równocześnie do  $\mathcal{K}$  i  $\mathcal{K}$  lub do  $\mathcal{K}$  i  $\mathcal{K}$ . Inaczej mówiąc pytamy, czy możliwe jest, aby dla tych samych warunków brzegowych istniały rozwiązania pól o 4 obszarach, jeśli rozwiązania te można otrzymać już w ramach struktur o dwóch, bądź trzech obszarach.

Na podstawie wyznaczonych  $\mathcal{K}$  i  $\mathcal{K}$  (rys. 12 i rys. 16) możemy stwierdzić, że jeśli  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|) \in \mathcal{K}$ , to zawsze zachodzi także  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|) \in \mathcal{K}$ . Zwróćmy uwagę, że ten ogólny wniosek nie traci ważności także w przypadku warunków brzegowych określonych na zbiorze:

$$\left\{ (\omega, \omega, \kappa): \omega = \omega, \quad \omega \in \left[ \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \right], \quad \kappa = 0 \right\}$$

ponieważ zbiór ten nie należy zarówno do  $\mathcal{K}$ , jak i do  $\mathcal{K}$ .

Z kolei w przypadku, gdy  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|) \in \mathcal{K}$ , to prawie zawsze zachodzi także  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|) \in \mathcal{K}$ ; wyjątek stanowią warunki brzegowe określone na odcinkach:

$$\left\{ (\omega, \omega, |\kappa|): \omega = \omega \pm \frac{2}{3}\pi, \quad |\kappa| = \pi, \quad \omega \in (0, \pi), \quad n = 1, l \right\},$$

dla których rozwiązanie pola istnieje tylko w ramach struktury o 3 obszarach jednorodnego stanu naprężenia. Powiększenie liczby obszarów do  $l = 4$  nie jest tu możliwe.

Zwróćmy również uwagę na fakt, że dla warunków brzegowych określonych na odcinkach

$$\{(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(0)}{\omega}, |\varkappa|): \overset{(0)}{\omega} = \overset{(1)}{\omega}, \quad |\varkappa| = \pi \quad \text{i} \quad \varkappa = 0, \quad \overset{(n)}{\omega} \in (0, \pi), \quad n = 1, l\},$$

nie istnieją rozwiązania zarówno w ramach struktur o trzech jak i o czterech obszarach. Łącznie z wnioskami podanymi wyżej dla  $\mathcal{K}$  mogłoby to sugerować,

że dla warunków brzegowych, w których  $\overset{(0)}{\omega} = \overset{(1)}{\omega}$ ,  $|\varkappa| = \pi$  lub  $\varkappa = 0$ , nie istnieje rozwiązanie pola, które byłoby złożone z mniejszej liczby obszarów aniżeli  $l = 4$ . Tymczasem przykład takiego rozwiązania podano na rys. 17c. Otóż jest to wyjątkowy przypadek, dla którego rozwiązanie pola istnieje tylko w postaci zdegenerowanej. Degeneracja ta wiąże się z pozornie sztucznym

warunkiem  $\Theta \neq \pi$ , jaki wprowadza się tylko dla pól zawierających z założenia 3 obszary jednorodne. Warunek ten musi być jednak dołączony, by konsekwentnie wydobywać wszystkie przypadki degeneracji strukturalnych. Pole pokazane na rys. 17c zawiera w istocie dwa obszary jednorodne.

Pola elementarne o różnych strukturach, ale otrzymane dla takich samych warunków brzegowych różnią się m.in. parametrem  $\delta$  (por. (5.2)<sub>2</sub>, rys. 5). Możliwość zmian tego parametru okazuje się bardzo ważna podczas rozwiązywania pól złożonych. Żąda się tam bowiem często, by składowe pola elementarne zawierały się w pewnej, z góry ustalonej półpłaszczyźnie ograniczonej zadaniem kątem  $\delta$ . Zwróćmy uwagę, że rozbudowa struktur wiąże się z tworzeniem dodatkowych stopni swobody, które można wykorzystać dla spełnienia także i tego warunku. Wraz z rozbudową struktur, liczba będących w dyspozycji równań nie wzrasta, wzrasta natomiast liczba zmiennych. Możliwość ciągłych zmian  $\delta$  pojawia się dopiero dla struktur zawierających co najmniej  $l = 4$  obszary jednorodnego stanu naprężenia, ale — jak wyżej pokazano — nie dla wszystkich warunków brzegowych jest dopuszczalna.

## 15.2. Pola o pięciu obszarach stanów jednorodnych

15.2.1. Pole o pięciu obszarach jako pole złożone. Pola o pięciu obszarach można zbudować z dwóch pól, które zawierają po 3 obszary jednorodne,

takich jednak, w których parametr  $\omega$  w obu polach składowych nie jest z góry ustalony. Żądamy tylko, by obrazy  $P(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega})$  linii  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  zawierały się w podobszarach  $A_{1,5}^{n,n+1}$  wyznaczonych dla danych  $\overset{(1)}{\omega} = c$ ,  $\overset{(5)}{\omega} = c$ . Przykład takich podobszarów pokazano na rys. 11.

Dla rozwiązania pola, które zawiera pięć obszarów jednorodnych dysponujemy — podobnie jak uprzednio — jednym tylko związkem równościowym typu (10.4), w którym niewiadomymi są:  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega^{(3)}$ ,  $\omega^{(4)}$ ,  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ ,  $q^{(3)}$ ,  $q^{(4)}$ . Pozostałe warunki ((10.5) i (10.6)) wyznaczają dopuszczalny

obszar rozwiązań. Obszaru  $\mathcal{K}^{(5)}$  nie będziemy szczegółowo wyznaczali. Do dalszych analiz wystarczy dolne oszacowanie jego powierzchni granicznej.

15.2.2. *Dolne oszacowanie zbioru punktów minimalnych powierzchni*  $\max |\kappa(\omega, \omega)^{(1)(5)}$ . Dla uproszczenia analiz, dolną ocenę minimum powierzchni  $\max |\kappa(\omega, \omega)^{(1)(5)}$  ograniczającej od góry obszar  $\mathcal{K}^{(5)}$  wyznaczymy geometrycznie, wykorzystując formę przestrzenną obszaru  $\mathcal{K}^{(3)}$  (rys. 14a) oraz konstrukcję obszaru płaskiego **A** z rys. 14b.

Dla pola zawierającego 5 obszarów, zbudowanego z dwóch pól o 3 obszarach, należy rozważyć dwa obszary typu **A** (rys. 21.) określone, odpowiednio, na produktach  $\Omega'$  (11.9) zdefiniowanych następująco:

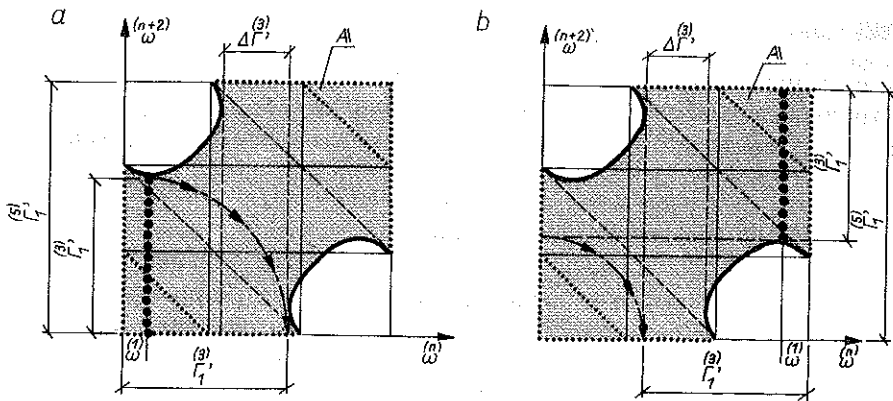
$$\{(\omega, \omega): \omega \in [0, \pi], \omega \in [0, \pi]\}^{(1)(3)(1)(3)}$$

oraz

$$\{(\omega, \omega): \omega \in [0, \pi], \omega \in [0, \pi]\}^{(3)(5)(3)(5)}$$

Obszary **A** pozwalają wyznaczyć dopuszczalne przedziały  $\Gamma_1^{(3)}$  takie, że jeśli  $\omega = \Gamma_1^{(3)}$ , to rozwiązanie pola składowego o 3 obszarach istnieje dla każdego  $|\kappa|$  z przedziału otwartego  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  (11.10).

Na rys. 21a i 21b pokazano przypadki, które wiążą się z najbardziej niekorzystnymi (najmniejszymi) przedziałami  $\Gamma_1^{(3)}$ . Widzimy, że nawet w takiej sytuacji przedział  $\Gamma_1^{(3)}$  zawiera w sobie pewien podprzedział  $\Delta\Gamma'^{(3)}$  o długości większej od zera i równej około  $\frac{\pi}{5}$ . Biorąc  $\omega \in \Delta\Gamma'^{(3)} \subset \Gamma_1^{(3)}$  można zatem zawsze otrzymać  $\Gamma_1^{(5)} = (0, \pi)$ . Z faktu, że  $\Delta\Gamma'^{(3)} \neq \emptyset$ , wynika następnie, iż  $\omega$  może być dowolnie zmieniana w  $\Gamma_1^{(3)}$ , a mimo to  $\Gamma_1^{(5)}$  nie ulegnie zmniejszeniu.



Rys. 21. Najbardziej niekorzystne przypadki rozwoju przedziałów  $\Gamma_1^{(3)}$ ,  $\Gamma_1^{(5)}$  dla pól zawierających pięć obszarów jednorodnych

Wnioskujemy zatem, że zawsze można tak dobrać wartość parametru  $\omega$ , by pola składowe o trzech obszarach ((1, 2, 3) i (3, 4, 5)) nie ulegały degeneracji, to znaczy, by w ramach każdego z nich oddzielnie można było otrzymywać nie tylko rozwiązania dla  $|\kappa| \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , lecz także dla  $\kappa = 0$  oraz dla

$|\kappa|$  równej co najmniej  $\frac{\pi}{2}$ . Jeśli więc pole zawiera pięć obszarów jednorodnych, to można otrzymywać nawet rozwiązania dla  $\kappa = 0$  i  $|\kappa| \geq \pi$  przy dowolnych wartościach parametrów  $\omega$ ,  $\omega$  z przedziału  $(0, \pi)$ .

Minimum powierzchni  $\max |\kappa(\omega, \omega)|$ , która ogranicza od góry obszar  $\mathcal{K}$  wynosi więc co najmniej  $|\kappa| = \pi$ .

### 15.3. Liczba linii nieciągłości naprężeń wokół wewnętrznego węzła pola złożonego.

Rozważamy nieciągłe pole naprężeń wokół wewnętrznego węzła linii  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  pola złożonego. Zakładamy, że:

- a) wszystkie linie nieciągłości naprężeń zbiegają się w jednym punkcie,
- b) w żadnym z obszarów jednorodnych nie powstaje stan beznaprężeniowy,
- c) nie nakłada się żadnych warunków związanych z oddziaływaniami obszarów wokół węzłów sąsiednich: rozpatrujemy pole izolowane.

Wspomniane stany beznaprężeniowe mogą się tworzyć w węzłach zewnętrznych pól złożonych, w szczególności w węzłach, które leżą na brzegach swobodnych.

Pole wokół węzła można analizować podobnie do już omówionych, to

znaczy jako pole złożone z  $l$  obszarów jednorodnych, takie jednak, że  $\omega = \omega^{(1)}$  (symetria) oraz  $\kappa = 0$ , bądź  $|\kappa| = \pi$ .

Analogiczne warunki brzegowe były rozpatrywane m.in. w punktach 14.1 i 15.2. Na podstawie otrzymanych tam wyników możemy teraz stwierdzić, że dla  $\omega = \omega^{(1)}$ ,  $\kappa = 0$  lub  $|\kappa| = \pi$ , rozwiązania rozważanych obecnie pól istnieją tylko w dwóch następujących sytuacjach:

pole zawiera dwa obszary jednorodne rozdzielone w istocie jedną tylko linią  $\mathcal{L}$ , którą w sposób sztuczny dzieli się na dwie półproste  $\mathcal{L}^{12}$  i  $\mathcal{L}^{23}$  (por. rys. 17c); pole takie jest przypadkiem zdegenerowanym pola o pięciu obszarach jednorodnych; mamy tutaj:  $\Theta = \pi$ ;

struktura pola zawiera pięć obszarów jednorodnych, które są rozdzielone układem czterech linii  $\mathcal{L}$ , przy czym stany naprężeń w obszarach skrajnych 1 i 5 są identyczne.

Dla potrzeb praktycznych można powyższe wypowiedzieć następująco:

Poza przypadkami szczególnymi (zdegenerowanymi), w których liczba niezbędnych linii  $\mathcal{L}$  wokół wewnętrznego węzła wynosi 2, a ich konfiguracja przyjmuje postać dwóch współliniowych półprostych, najmniejsza liczba linii  $\mathcal{L}$  wokół węzła wynosi 4. W przypadkach określonych jako zdegenerowane, dwie spośród czterech linii  $\mathcal{L}$  znikają, ponieważ rozdzielałyby obszary, w których panują identyczne stany naprężenia.

Zwróćmy uwagę na zgodność podanego wniosku ze stwierdzeniem niedopuszczalności „zamiany” jednej linii  $\mathcal{L}$  układem dwóch linii  $\mathcal{L}$ , przy tych samych warunkach brzegowych, omówionym w punkcie 14.1.

#### 15.4. Próba klasyfikacji pól elementarnych

Pod określeniem „pola elementarne” rozumiemy na ogół najmniejsze podzespoły, z których można budować pola dowolnie złożone. Najprostsze, nieciągłe pole elementarne składa się z dwóch obszarów stanów jednorodnych, które rozdziela jedna linia nieciągłości naprężeń  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{L}^{12}$ ). Kwestia określenia największej liczby obszarów jednorodnych w polu elementarnym nie jest już tak jednoznaczna. Liczba ta może przyjmować wartości 4 lub 5, zależnie od tego, czy do podanego sposobu rozumienia pól elementarnych dołączymy jeszcze kryteria związane z warunkami brzegowymi, czy ich nie dołączymy.

Gdy wziąć pod uwagę wyłącznie kryterium strukturalne — największa liczba obszarów jednorodnych w polu elementarnym wyniesie 4. Pole o pięciu obszarach należy wtedy uważać za pole złożone, ponieważ można je zawsze zbudować z dwóch pól o trzech obszarach (por. 15.2). Wystarczy w tym celu założyć, że stan naprężenia w obszarze pośrednim „3” nie jest z góry ustalony

i zażądać, by  $P(\omega, \omega) \in A_{1,3}^{2,3}$  oraz  $P(\omega, \omega) \in A_{1,5}^{3,4}$ .

Z drugiej strony, zakładanie struktur o trzech lub nawet o czterech obszarach nie zabezpiecza istnienia rozwiązania pola przy dowolnie przyjmowanych warunkach brzegowych, to znaczy dla  $\omega \in (0, \pi)^{(1)}$ ,  $\omega \in (0, \pi)^{(2)}$ ,  $|\kappa| \in [0, \pi]$ . Na przykład w ramach struktur, które zawierają 4 obszary, rozwiązania pól istnieją dla prawie wszystkich zbiorów wartości parametrów brzegowych z wyjątkiem zbiorów punktów osobliwych obszarów  $(\mathcal{K})^*$  (rys. 16). Analizując te zbiory, wyprowadzono m.in. wniosek, że chcąc otrzymać rozwiązania pól dla dowolnych  $\omega \in (0, \pi)^{(1)}$ ,  $\omega \in (0, \pi)^{(2)}$  oraz  $|\kappa|$  z przedziału domkniętego  $[0, \pi]$ , należy zakładać strukturę o 5 obszarach jednorodnych. Gdyby zatem do warunków strukturalnych dołączyć żądanie, aby  $|\kappa| \in [0, \pi]$ , to także pola o 5 obszarach zaliczałyby się do elementarnych.

Bliższe fizycznej naturze zadania i ogólnie akceptowanemu sposobowi rozumienia pól elementarnych wydaje się być kryterium oparte wyłącznie na cechach strukturalnych. Przyjmując je tutaj — do własności, które posłużyły dla zdefiniowania pól elementarnych zestawionych w części I — dołączyć należy jeszcze warunek, że są to pola o co najwyżej czterech obszarach jednorodnych.

Klasyfikacje pól, jakie spotyka się w literaturze opierają się głównie na wyróżnianiu charakterystycznych warunków brzegowych. Są to kryteria niejednoznaczne, chociaż pośród wyodrębnionych według nich pól mogą być także pola elementarne, o ile są rzeczywiście najmniejszymi podzespołami pól złożonych, a nie polami o wyższym stopniu agregacji obszarów jednorodnych — konstruowanymi w celu spełnienia konkretnych warunków brzegowych. Należy podkreślić, że na sprawę klasyfikacji pól zwrócono już uwagę w pracy [1], gdzie — zgodnie z podanymi w tej pracy wnioskami — mówi się o „technicznie ważnych przypadkach warunków brzegowych”.

Podział pól elementarnych według warunków brzegowych doprowadził do powstania wielu pojęć dodatkowych, które w szczególnych sytuacjach praktycznych miały dość duże znaczenie dla efektywnego rozwiązywania pól złożonych. Część tych pojęć powstała jednak w sposób sztuczny w istocie tylko pogłębiając i tak już duże trudności rozwiązywania nieciągłych pól granicznych. Sytuację tę, być może, nieźle zilustruje na przykład fakt, że pola elementarne o 4 obszarach nie były dotąd wcale wyróżniane. Tymczasem, jak się okazało, mają one znaczenie podstawowe — analogiczne do znaczenia pól o 3 obszarach.

## 16. UWAGI KOŃCOWE

Podane wyniki badań obszarów istnienia rozwiązań uwzględniają w zasadzie wszystkie podstawowe kwestie związane z doбором struktur pól elementarnych, w których to polach zakłada się warunek plastyczności Hube-

ra-Misesa. Na podstawie wniosków z tych badań udało się także przeanalizować struktury układów linii nieciągłości naprężeń wokół wewnętrznych i zewnętrznych węzłów linii w polach złożonych. Dotyczy to jednak sytuacji, gdy mamy do czynienia z węzłami izolowanymi. Problemy związane z nakładaniem dodatkowych warunków, jakie wynikają z wzajemnych sprzężeń pól wokół sąsiednich węzłów linii  $\mathcal{L}$  w polach złożonych, nie były w pracy rozważane. Autor dysponuje już wprawdzie pewnymi rozwiązaniami takich zadań, nie mniej są to jeszcze wyniki, które mogą ewentualnie nie ilustrować całości możliwych wniosków i dlatego nie zostały zamieszczone. Redukcja liczby równań i niewiadomych jest tam jednak dobrze widoczna. Zwróćmy uwagę, że przy zastosowaniu opisu klasycznego, na przykład do rozwiązania pola wokół izolowanego węzła wewnętrznego, należałoby ułożyć co najmniej 12 równań: 8 skalarnych równań równowagi na liniach  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  (min  $l=4$ ) i 4 warunki równościowe, jakie wynikają z założonego kryterium uplastycznienia<sup>(2)</sup>. W opisie parametrycznym układamy tu tylko jedno równanie typu (10.4).

Na podstawie otrzymanych wyników udało się również skonstruować algorytm komputerowy, który pozwala rozwiązywać nieciągłe pola płaskie wokół kolejnych węzłów linii  $\mathcal{L}$  i w ten sposób budować pola dowolnie złożone. Do tego celu nie są już potrzebne ani gotowe rozwiązania szczególnie prostych pól składowych, ani układane dla nich indywidualnie algorytmy obliczeń.

Program ten został upowszechniony pod nazwą „Komb”. Jego wykorzystanie zmienia jakościowo metodykę rozwiązywania płaskich pól złożonych, jakkolwiek wydaje się, że uzyskany postęp mógłby być już znacznie większy. „Komb” wykorzystuje bowiem zaledwie część wniosków, jakie w pracy wyprowadzono. Wydaje się, że są już one na tyle kompletne, iż mogą być wykorzystane w próbach konstrukcji algorytmu znacznie bardziej rozbudowanego, generującego automatycznie struktury układów linii  $\mathcal{L}$  i samodzielnie rozwiązującego graniczne pola płaskie przynajmniej dla pewnej klasy warunków brzegowych. Jest to jednak osobne zadanie, które może być podjęte przez duże zespoły badawcze.

Podobne analizy struktur pól granicznych, w których zakładano by warunek plastyczności Treski nie zostały dotychczas przeprowadzone. Jakkolwiek można tu przewidywać pewne analogie, to jednak w szczegółach powstaną zapewne istotne różnice. Interesującą ciekawostką może stanowić natomiast fakt, że wszystkie z dotąd rozwiązanych pól złożonych, niezależnie od tego, czy zakładano w nich warunek Hubera-Misesa, czy też warunek Treski, posiadają struktury, których własności są ogólnie zgodne z wnioskami, jakie w pracy przedstawiono.

<sup>(2)</sup> Zgodnie z założeniami podanymi na początku części I, rozważane są wyłącznie nieciągłe pola płaskie.



## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, Rozpr. Inżyn., 13, 497–510, 1965.
2. W. SZCZEPIŃSKI, J. SZLAGOWSKI, *Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń*, PWN, Warszawa 1985.
3. *Węzły i połączenia konstrukcyjne*, red. H. FRĄCKIEWICZ, WNT, Warszawa 1986.
4. J. SZLAGOWSKI, *Kształtowanie węzłów konstrukcji stalowych metodą tensorowego nakładania dwóch pól naprężeń*, Rozpr. Inżyn., 29, 3, 401–417, 1981.
5. W. BODASZEWSKI, *Rozwiązania statycznie dopuszczalnych, płaskich i granicznych siatek linii nieciągłości naprężeń*, Prace IPPT, 43, 1983.
6. W. SZCZEPIŃSKI, J. SZLAGOWSKI, *Graniczne, statycznie dopuszczalne, nieciągłe pola naprężeń do szacowania nośności granicznej*, Prace IPPT, 20, 1976.
7. *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*, red. J. SZYMANOWSKI, PWN, 1984.
8. M. J. BOX, *A new method of constrained optimization and a comparison with other methods*, Comp. J., 8, 1965.
9. K. C. KIWIEL, *Niektóre metody obliczeniowe optymalizacji nieróżniczkowalnej*, Praca habilitacyjna, Ossolineum 1988.
10. W. BODASZEWSKI, *Struktury układów linii nieciągłości naprężeń w polach granicznych, spełniających warunek Hubera–Misesa. Część I: Zadania bez ograniczeń geometrycznych*, Rozpr. Inżyn., 36, 1, 29–54, 1988.

## РЕЗЮМЕ

СТРУКТУРЫ СИСТЕМ ЛИНИЙ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ В ГРАНИЧНЫХ ПОЛЯХ,  
УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ГУБЕРА–МИЗЕСА.  
ЧАСТЬ III. СТРУКТУРНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ  
ПОЛЕЙ.  
МНОЖЕСТВА ОСОБЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрена проблема существования решений элементарных полей для случая задач с полной системой условий. Внимание сосредоточено на исследованиях поведения решений при особых граничных условиях, т. зн. таких, для которых исходные структуры полей подлежат вырождению. Показано, что множества особых граничных условий локализируются или на границах областей, определенных во II части, при слабых ограничениях, или образуют в них линии поверхности разрыва. Подробно обсуждены ситуации на физической плоскости, которые возникают в полях с вырожденными структурами. Сделанные выводы позволили, между прочим, 1) выяснить эффекты, связанные с вырождением структур элементарных полей; 2) найти нижнюю оценку минимума поверхности, ограничивающей область существования решений полей с 5 областями однородности; эти поля не принадлежат к элементарным; 3) определить наименьшее количество линий разрыва напряжений вокруг изолированного узла этих линий в сложном поле; 4) сформулировать однозначный критерий разделения элементарных полей и на этой основе показать, что поля о 4 областях, выделенные в I части, составляют класс о значению сравнимым с отмечаемым до сих пор классом с 3 областями однородного напряженного состояния; 5) показать наиболее существенные трудности решения разрывных и граничных статически допустимых полей.

## SUMMARY

STRUCTURE OF STRESS DISCONTINUITY LINES IN LIMITING  
FIELDS WHICH SATISFY THE HUBER—MISES CONDITIONS

PART III. STRUCTURAL CONDITIONS OF EXISTENCE OF ELEMENTARY FIELDS. SETS OF SINGULAR BOUNDARY CONDITIONS

Problem of existence of solutions of elementary fields is considered for the case of problems with a complete system of conditions. Attention is focussed on the solutions subject to singular boundary conditions, i.e. such for which the original field structures are degenerated. The sets of singular b.c. are either localized at the boundaries of regions determined in Part II of the paper subject to weaker limitations, or they form discontinuity lines and surfaces. Detailed analysis is applied to situations within the physical plane, which arise in fields of degenerate structure. The results obtained make it possible (1) – to explain the effects resulting from degeneration of elementary fields; (2) – to find the lower estimates of minimal surfaces bounding the region of existence of solutions of fields consisting of 5 homogeneous regions; such fields are not elementary; (3) – to determine the lowest number of stress discontinuity lines at an isolated node of such lines; (4) – to formulate the unique criterion of subdivision into elementary fields; (5) – indicate the considerable difficulties encountered in solving discontinuous and limiting statically admissible fields.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 maja 1988 r.

ERRATA

do pracy: STRUKTURY UKŁADÓW LINII NIECIĄGŁOŚCI NAPRZEŃ W POLACH GRANICZNYCH, SPELNIAJĄCYCH WARUNEK HUBERA-MISEGA

Część I. STRUKTURALNE WARUNKI ISTNIENIA PÓL ELEMENTARNYCH. ZADANIA BEZ OGRANICZEŃ GEOMETRYCZNYCH.

Rozpr. Inż. 36,1,86

str wzór	jest	powinno być
29 <sup>d</sup>	W OBSZARACH GRANICZNYCH	W POLACH GRANICZNYCH
34 <sup>14</sup>		
(3.4) <sub>1</sub>	..., (z'), $\gamma c^{(z')}$ , ...	..., (z'), $\gamma c^{(z')}$ , ...
(3.4) <sub>2</sub>	..., (z'), $\phi c^{(z')}$ , ...	..., (z'), $\phi c^{(z')}$ , ...
(3.4) <sub>3</sub>	... $c^{-1} z'^{1/2} + i \sin [ \dots ]$	... $c^{-1} z'^{1/2} \sin [ \dots ]$
34 <sub>1</sub>	... $\text{sign}((z'), (z'))$ , ...	... $\text{sign}((z') - (z'))$ , ...
(3.5) <sub>2</sub>		
37 <sup>5</sup>	..., $x^{(n)}$ , ...	..., $x^{(n)}$ , ...
(3.7)		
43 <sup>1</sup>		$/n=1, 2, \dots, (1-2)/;$
(5.3)		
43 <sub>2</sub>	kształt	geometrię
43 <sub>1</sub>	$\eta_1 c^{(z'), (z'), 1} = 0$	$\eta_1 c^{(z'), (z'), 1} = 0$
44 <sup>14</sup>	... } ...	... ] ... $(m) = (m)$ ...
(5.4)		
44 <sup>19</sup>	... } ...	... ] ... $(m) = (m)$ ...
44 <sub>1</sub>	... $[\sin(\frac{\pi}{\sigma} - (z'))^{(n)}] = \dots$	... $[\sin(\frac{\pi}{\sigma} - (z'))] : (n) = \dots$
(5.6) <sub>1</sub>		
44 <sub>2</sub>	... $[\sin(\frac{\pi}{\sigma} + (z'))^{(n)}] = \dots$	... $[\sin(\frac{\pi}{\sigma} + (z'))] : (n) = \dots$
(5.6) <sub>2</sub>		
45 <sub>0</sub>		
(5.7) <sub>1</sub>	... } ...	... ] ... $(n) \neq (n+1), (n+1) \in (0, n), (m) = (m)$ }
(5.7) <sub>2</sub>	... $\Gamma_m^{(n+1)}$ ...	... $\Gamma_m, (m) = (m)$ ...
53 <sup>18</sup>	nie istnieją.	na ogół nie istnieją.