

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ANALIZIE PRZYŚPIESZONEGO PEŁZANIA KONSTRUKCJI CZ. 1. TEORIA

LESZEK GADOMSKI (SIEDLCE) I WIESŁAW WOJEWÓDZKI (WARSZAWA)

Sformułowano równania metody elementów skończonych do opisu pełzania przyspieszonego. Konstrukcje znajdujące się w podwyższonej temperaturze poddane są działaniu stałego w czasie obciążenia. Przyjęto addytywność odkształceń sprężystych i pełzania. Odkształcenia sprężyste wyraża prawo Hooke'a. Prędkość odkształceń pełzania i zmiany parametru uszkodzenia są dane przez równania LECKIEGO i HAYHURSTA, [3]. Podstawowy układ równań, po zastosowaniu procedury metody elementów skończonych, został zredukowany do różniczkowo-całkowych równań, w których niewiadomymi są naprężenia i parametr uszkodzenia. Numeryczne całkowanie tych równań względem zmiennych przestrzennych prowadzi do nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. Ten układ z kolei, jest całkowany względem czasu metodą Eulera. Otrzymano analityczne wyrażenie na długość kroku czasowego zapewniającego numeryczną stabilność rozwiązania. Zaproponowano specjalny sposób numerycznego opisu uszkodzonych elementów w procesie pełzania konstrukcji, które nie są w stanie przenosić dalej obciążenia. Czyny to algorytm obliczeń prostszym w stosunku do istniejących podejść.

1. WPROWADZENIE

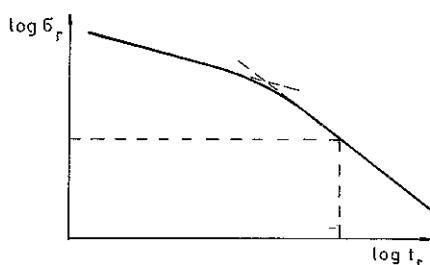
Konstrukcje takie jak części samolotów, urządzeń energetyki jądrowej, instalacji chemicznych, reaktorów, turbin gazowych, silników Diesla, różnego rodzaju zawory, obudowy, zbiorniki wykonane z aluminium, stali, niklu, stopów żelaza i innych metali pracują w podwyższonych temperaturach. W temperaturach $0.3\theta_m$ i wyższych, gdzie θ_m jest temperaturą topnienia metalu, uwzględnienie pełzania jest konieczne. W przypadku poruszających się i ściśle dopasowanych części maszyn wielkość odkształceń pełzania decyduje często o czasie ich technicznej użyteczności. W innych przypadkach, gdzie wielkość odkształceń nie jest tak istotna, czas technicznej użyteczności konstrukcji (czas życia) jest określony pojawieniem się pęknięć i nieszczelności. Przy dużym naprężeniu i niskiej temperaturze na skutek ciągliwości metali pęknięcie (ciągliwe lub transkrystaliczne) występuje przy dużych odkształceniach i wyraźnym przewężeniu przekroju. Przy małym naprężeniu i wysokiej temperaturze, pęknięcie (kruche lub interkrystaliczne) pojawia się przy małych odkształceniach pełzania jako rezultat wzrostu akumulacji mikrouszkodzeń wewnętrz-

nej struktury metalu (szczelin i pustek na granicach ziaren). Te formy pęknięć wynikają z zachowania się granic ziaren w określonej temperaturze. Powyżej temperatury równej kohezji, wytrzymałość połączeń ziaren jest mniejsza niż samych ziaren i zniszczenie ma charakter kruchego pęknięcia. Natomiast poniżej tej temperatury zniszczenie ma ciągliwy charakter i zależy głównie od zachowania się ziaren. Może również wystąpić zniszczenie o mieszanym charakterze. Temperatura równej kohezji wynosi około $0.4\theta_m \div 0.6\theta_m$. Zależy ona głównie od materiału i maleje ze wzorem pełzania.

W pracy zajmować się będziemy pełzaniem metalowych konstrukcji w podwyższonych temperaturach przy małych naprężeniach. Fizyczne procesy zachodzące w deformowanym materiale w takich warunkach (mechanizmy nukleacji i wzrostu mikrodefektów [1]) prowadzą do kumulacji mikrouszkodzeń na granicach ziaren i w konsekwencji do propagacji kruchych pęknięć wyczerpujących nośność elementu konstrukcji. W prostej próbie pełzania postępującemu uszkodzeniu mikrostruktury materiału towarzyszy wzrost prędkości odkształcenia w trzeciej fazie pełzania.

W przypadku statycznie wyznaczalnych konstrukcji określenie czasu do zniszczenia (czasu życia) jest proste, ponieważ stan naprężenia jest wyznaczony przez równania równowagi. Podstawiając obliczone naprężenia do związków fizycznych znajdujemy poszukiwany czas.

W przypadku statycznie niewyznaczalnych konstrukcji zagadnienie jest złożone. W procesie projektowania stosuje się uproszczony sposób postępowania dla określenia czasu życia, a mianowicie poszukuje się maksymalnego naprężenia w stanie ustalonego pełzania i korzysta z zależności naprężenie–czas pęknięcia, ustalonej dla jednoosiowego stanu, rys. 1. Jednakże ten sposób ma kilka słabych punktów. Po pierwsze, określenie naprężeń w ustalonym stanie pełzania nie jest proste, wymaga najczęściej użycia numerycznych metod. Po drugie, w niektórych przypadkach można otrzymać niekonserwatywne oceny na skutek pominięcia wpływu złożonego stanu naprężenia na zniszczenie [2]. Po trzecie, naprężenia ustalonego stanu pełzania zmieniają się kiedy w obszarach o największym wyężeniu pojawiają się lokalne zniszczenia. W obszarach tych występuje odciążenie i maleje prędkość kumulacji uszko-



Rys. 1. Krzywa naprężenie — czas pęknięcia próbek

dzeń. Ta redystrybucja naprężeń, jak również redystrybucja z początkowego stanu sprężystego do stanu ustalonego pełzania, powodują, że na ogół czas życia konstrukcji jest znacznie dłuższy niż ten określony z procedury wykorzystującej stan ustalonego pełzania [3].

Ścisłe określenie pola naprężeń odkształceń oraz stopnia akumulacji uszkodzeń struktury materiału konstrukcji wymaga z reguły numerycznego rozwiązania nieliniowego układu równań różniczkowych cząstkowych z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi. Równania fizyczne, będące częścią tego układu, są formułowane na gruncie kontynuualnej mechaniki uszkodzeń. W przypadku konstrukcji o złożonych kształtach i warunkach brzegowych, trzeba stosować metodę elementów skończonych. Jej użycie jest na ogół złożone, wymaga komputera o dużej pamięci, stąd dotychczasowe zastosowania są nieliczne, [4].

Celem pracy jest przedstawienie możliwie prostej metody analizy przyspieszonego pełzania, wykorzystującej koncepcję elementów skończonych oraz jej zastosowanie do analizy konstrukcji o różnorodnej geometrii i dowolnej postaci obciążenia.

2. PODSTAWOWE ZWIĄZKI I RÓWNIANIA

Rozpatrujemy ciało zajmujące w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej obszar Ω . Na części powierzchni ciała Γ_u określone są przemieszczenia $\bar{u}_j(\mathbf{x}, t)$, na pozostałej części $\Gamma_t = \Gamma - \Gamma_u$ zadane jest obciążenie $t_j(\mathbf{x}, t)$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, x_i oznacza współrzędne kartezjańskie, a t czas.

Składowe tensora naprężenia σ_{ij} spełniają równania równowagi i warunki brzegowe

$$(2.1) \quad \sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$(2.2) \quad \sigma_{ji} n_j = t_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t,$$

gdzie $f_i(\mathbf{x}, t)$ oznaczają składowe sił objętościowych, a n_j składowe wersora normalnego do powierzchni Γ_t w punkcie \mathbf{x} . W równaniach (2.1) pominięto człony inercyjne ze względu na quasi-statyczny charakter pełzania.

Pole przemieszczeń $u_i(\mathbf{x}, t)$ musi spełniać dane warunki brzegowe

$$(2.3) \quad u_i = \bar{u}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u.$$

Przyjmujemy, że odkształcenia są małe, a zatem

$$(2.4) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

oraz

$$(2.5) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p.$$

Związek między sprężystą częścią odkształceń ε_{ij}^e i naprężeniami ma postać

$$(2.6) \quad \varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_0 \theta \delta_{ij},$$

gdzie C_{ijkl} jest tensorem stałych sprężystości, α_0 oznacza współczynnik liniowej rozszerzalności, θ temperaturę, a δ_{ij} jest deltą Kroneckera.

Równania opisujące prędkości odkształceń pełzania $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ oraz równanie prędkości zmian parametru uszkodzenia $\dot{\psi}$ przyjmujemy w postaci [3],

$$(2.7) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{K}{\psi^n} \varphi^n \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$(2.8) \quad \dot{\psi} = -\frac{A}{\psi^v} \Delta^v.$$

Funkcje $\varphi(\sigma_{ij})$ i $\Delta(\sigma_{ij})$ są wypukłe i jednorodne stopnia pierwszego; przyjmują wartość σ w jednoosiowym stanie naprężenia. Stałe materiałowe K , n , A , v są zależne od temperatury i są wyznaczane z prób jednoosiowego pełzania w drugiej i trzeciej fazie. Skalarna makroskopowa zmienna stanu ψ (parametr ciągłości, ogólnie używa się nazwy parametr uszkodzenia) przybiera wartości: 1 w stanie początkowym bez defektów oraz 0 w chwili zlokalizowanego zniszczenia materiału.

Moc dysypacji na jednostkę objętości w procesie pełzania wynosi

$$(2.9) \quad D = \dot{\varepsilon}_{ij}^c \sigma_{ij} = \frac{K}{\psi^n} \varphi^{n+1}.$$

Dla materiałów statecznych w sensie Druckera powierzchnie stałej dysypacji mocy $D(\sigma_{ij}) = \text{const}$ są wypukłe i są potencjałem dla wyznaczenia prędkości odkształceń pełzania [5],

$$(2.10) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{1}{n+1} \frac{\partial D}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Wypukłość jednorodnej funkcji φ wynika z (2.9) dla $D(\sigma_{ij}) = \text{const}$.

Czas życia t_r otrzymuje się całkując równanie (2.8) i wykorzystując warunek $\psi = 0$. Dla stałego stanu naprężenia otrzymujemy związek

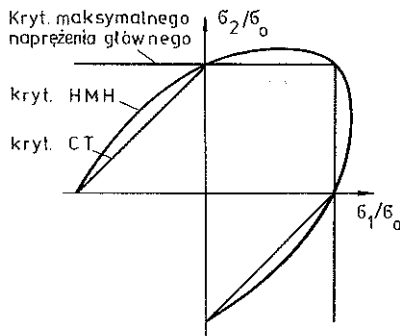
$$(2.11) \quad t_r = \frac{1}{A(1+v)\Delta^v}.$$

Powierzchnie izochron (powierzchnie jednakowych czasów zniszczenia) są dane równaniem $\Delta(\sigma_{ij}) = \text{const}$. Na podstawie badań doświadczalnych [6–8] określono w [8] następującą postać funkcji:

$$(2.12) \quad \Delta(\sigma_{ij}) = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_e + \gamma J_1 = \sigma_0,$$

gdzie α , β , γ stałe, przy czym $\alpha + \beta + \gamma = 1$, σ_0 oznacza jednoosiowe naprężenie

powodujące pęknięcie próbki w czasie t_0 , σ_1 jest maksymalnym naprężeniem głównym, $\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$ oznacza intensywność naprężenia, a $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia. Wartości α, β, γ wyznacza się z prób pełzania w jednoosiowym i dwuosiowym stanie naprężenia oraz z próby czystego skręcania. Specyfikując wartości α, β, γ otrzymuje się znane kryteria: a) dla $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ – kryterium maksymalnego naprężenia głównego (miedź, brąz), b) dla $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ dostaje się kryterium intensywności (lub efektywnego) naprężenia Hubera–Misesa (stopy aluminium, stal), c) dla $\beta = 1 - \alpha, \gamma = 0$ odnajdujemy kryterium SDOBYRIEWA [6]. Jak wykazały badania, kryteria a) i b) opisują skrajne przypadki zachowania się materiałów i w przypadku płaskiego stanu naprężenia są przedstawione na rys. 2. Konstruowaniu izochronicznych powierzchni zniszczenia jest poświęcona praca [9].



Rys. 2. Krzywe jednakowych czasów zniszczenia

Fenomenologiczne równania (2.7), (2.8) LECKIE i HAYHURSTA [3] są uogólnieniem równań jednoosiowego stanu naprężenia, równań KACZANOWA–RABOTNOWA [10,5]. Dla $\psi = 1$ równania (2.7) redukują się do równań ustalonego stanu pełzania.

Pojęcie uszkodzenia i jego reprezentacji za pomocą skalarnego parametru ciągłości ψ , oznaczającego ułamek powierzchni przekroju nie zajęty w danej chwili przez defekty, zostało wprowadzone przez KACZANOWA [10]. RABOTNOW [5] zamiast ψ wprowadza parametr $\omega = 1 - \psi$ nazywając go parametrem uszkodzenia, który określa teraz utraconą część aktualnej powierzchni przekroju.

Badania doświadczalne [11–16] wskazują w ogólności na anizotropowy charakter uszkodzenia, który zależy silnie od rodzaju materiału, typu obciążenia i temperatury. Makroskopowe zmienne stanu opisujące deteriorację materiału powinny mieć tensorowe własności. Dotychczasowe próby nie

doprowadziły do określenia takiego efektywnego modelu. Syntetyczny przegląd teorii kontynuального uszkodzenia materiałów zawiera praca [17].

Jednakże w przypadku ciągliwych metali i rzadkiej koncentracji kulistych mikrodefektów [11, 18, 19], skalarny parametr Kaczanowa nie uwzględniający kierunkowego charakteru uszkodzenia, może stanowić wystarczającą aproksymację rozkładu i gęstości uszkodzenia. Fizyczne teorie pełzania [1, 11] definiują uszkodzenie jako całkę z prędkości nukleacji i wzrostu pustek na granicach ziaren. LECKIE i HAYHURST [20] pokazali, że w warunkach proporcjonalnej historii naprężenia fenomenologiczne uszkodzenie ω jest znormalizowaną formą fizycznego całkowego uszkodzenia. Zatem w sytuacjach pełzania, gdy pola naprężeń nie ulegają dużym obrotom, równania konstytutywne (2.7), (2.8) mogą być stosowane.

Dla metali przy założeniu izotropii i nieściśliwości w zakresie odkształceń pełzania funkcję $\varphi(\sigma_{ij})$ w równaniu (2.7) przyjmuje się w postaci

$$(2.13) \quad \varphi(\sigma_{ij}) = \sigma_e = (3I_2)^{1/2},$$

gdzie $I_2 = s_{ij}s_{ij}/2$ jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężeń s_{ij} . Ponadto jeśli przyjąć powierzchnię izochroniczną dla przypadku b) (kryterium intensywności naprężenia), to wówczas równania (2.7), (2.8) przyjmują postać

$$(2.14) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{3K}{2\psi^n} \varphi^{n-1} s_{ij},$$

$$(2.15) \quad \dot{\psi} = -\frac{A}{\psi^v} \varphi^v.$$

3. ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO ANALIZY NIEUSTALONEGO PEŁZANIA

3.1. Sformułowanie zagadnienia

Podstawowe równania problemu podane w rozdziale 2 wygodniej jest dla celów dalszych rozważań przedstawić w postaci wektorowej. W tym celu oznaczamy przez $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ współrzędne przestrzenne, przez $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ pole przemieszczeń, przez $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ pole prędkości przemieszczeń oraz przez $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})^T = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})^T = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ odpowiednio, wektor składowych stanu odkształcenia i naprężenia. Mamy zatem

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e, \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$(3.2) \quad \dot{\epsilon}^c = \frac{K}{\psi^n} \varphi^n(\sigma) \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma},$$

$$\dot{\psi} = -\frac{A}{\psi^v} \varphi^v(\sigma)$$

oraz warunki brzegowe

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ \mathbf{M}^T \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_f \end{aligned}$$

i warunki początkowe

$$(3.4) \quad \psi(\mathbf{x}, 0) = 1, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}),$$

gdzie L^T jest operatorem różniczkowym,

$$(3.5) \quad L^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix},$$

\mathbf{D} oznacza macierz sprężystości, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ jest wektorem sił objętościowych, macierz \mathbf{M}^T zawiera cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej \mathbf{n} do brzegu Γ ,

$$(3.6) \quad \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Z uwagi na przyjętą tradycyjną postać wektora odkształcenia $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})^T$, podobnie i wektora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, funkcja $\varphi(\boldsymbol{\sigma})$ w (3.2) jest przekształconą postacią $\varphi(\sigma_{ij})$ występującą w równaniach (2.14), (2.15) po uwzględnieniu w tej ostatniej $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, gdy $i \neq j$. Ponadto $2\dot{\epsilon}_{ij}^c = \dot{\gamma}_{ij}^c$, gdy $i \neq j$. Pamiętając o tych uwagach, przyjmujemy w zapisach wektorowych to samo oznaczenie φ co i poprzednio.

Równania fizyczne (3.2) dla φ według (2.13) lub wprost równania (2.14) wygodniej jest dla celów obliczeń zapisać w postaci

$$(3.7) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\sigma},$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{3K}{2\psi^n} \varphi^{n-1} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ \text{(sym)} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Różniczkując względem czasu (3.1), (3.3) i eliminując $\dot{\epsilon}$, $\dot{\epsilon}^e$, $\dot{\sigma}$ otrzymujemy układ równań opisujących zagadnienie brzegowe dla pola chwilowych prędkości w czasie t :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}^T(\mathbf{DL}\mathbf{v}) &= -\dot{\mathbf{t}} + \mathbf{L}^T(\mathbf{D}\dot{\epsilon}^e), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{M}^T \mathbf{DL}\mathbf{v} &= \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{M}^T \mathbf{D}\dot{\epsilon}^e, & \mathbf{x} \in \Gamma_t, \\ \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}}, & \mathbf{x} \in \Gamma_u. \end{aligned}$$

Operator $\mathbf{L}^T(\mathbf{DL})$ jest liniowy, symetryczny, typu eliptycznego. Dla ϵ^e określonego na podstawie (3.2)₁ i przy spełnieniu odpowiednich warunków regularności brzegu Γ oraz danych funkcji $\dot{\mathbf{t}}$, $\bar{\mathbf{v}}$, rozwiązanie zagadnienia (3.8) istnieje i jest jednoznaczne.

Tak sformułowany problem będzie rozwiązywany w dalszej części pracy z zastosowaniem metody elementów skończonych.

3.2. Zasada prac wirtualnych, aproksymacja rozwiązania

Niech $\xi(\mathbf{x})$ będzie dowolnym, wystarczająco regularnym, polem wektorowym określonym dla $\mathbf{x} \in \Omega$. Mnożąc skalarnie ξ i równanie równowagi (3.1)₄ oraz całkując po objętości Ω i przekształcając otrzymujemy związek

$$(3.9) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{L}\xi)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \xi^T \mathbf{t} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \xi^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \xi^T \mathbf{t} d\Gamma.$$

Załóżmy, że ξ oznacza pole przemieszczeń \mathbf{u} , które aproksymuje się następująco:

$$(3.10) \quad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} + \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{a}},$$

gdzie $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ i $\bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{x}})$ są macierzami funkcji kształtu o wymiarach $3 \times n$ i $3 \times m$, odpowiednio regularne, a ponadto $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = 0$ dla $\mathbf{x} \in \Gamma_u$; $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ i $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)^T$ oznaczają parametry przemieszczeń. Podstawiając (3.10) do związku (3.9), który jest spełniony dla dowolnych zmian \mathbf{a} i $\bar{\mathbf{a}}$ otrzymujemy układ $(n+m)$ równań równowagi. Następnie ten liniowy układ przekształcamy po wykorzystaniu zależności (3.1), (3.10) do postaci

$$(3.11) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \bar{\mathbf{K}} \\ \bar{\mathbf{K}}^T & \bar{\bar{\mathbf{K}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T \end{Bmatrix} \mathbf{D}\epsilon^e d\Omega, \quad \begin{array}{l} (n \text{ równań}), \\ (m \text{ równań}), \end{array}$$

gdzie

$$(3.12) \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega, \quad \bar{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}} d\Omega, \quad \bar{\bar{\mathbf{K}}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}} d\Omega,$$

(n × n) (n × m) (m × m)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{N}(\mathbf{x}), \quad \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}).$$

Wektor $\bar{\mathbf{R}}$ zawiera n znanych składowych uogólnionych sił

$$(3.13) \quad \bar{\mathbf{R}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma,$$

natomiast \mathbf{R} (m składowych)

$$(3.14) \quad \mathbf{R} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

zawiera nieznaną składową (ostatni wyraz) zależny od nieokreślonych na razie reakcji \mathbf{t} na powierzchni Γ_u .

W (3.11) niewiadomymi są parametry przemieszczeń \mathbf{a} , natomiast $\bar{\mathbf{a}}$ spełniać musi warunek brzegowy

$$(3.15) \quad \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u.$$

Powyższe równanie spełnione może być dokładnie jeśli są zgodne zależności funkcyjne $\bar{\mathbf{N}}$ i $\bar{\mathbf{u}}$, tzn. gdy dane przemieszczenia $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ wyrazić można jako kombinację liniową przyjętych funkcji kształtu. Częściej zapewnić można spełnienie (3.15) tylko w skończonej liczbie m punktów brzegowych, wówczas wyrażenie $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}$ interpoluje zadane przemieszczenia $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ na podstawie ich wartości w wymienionych wyżej m punktach.

Zakładając dalej, że \mathbf{a} i $\bar{\mathbf{a}}$ są funkcjami czasu otrzymujemy z (3.11) (po zróżniczkowaniu względem t),

$$(3.16) \quad \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{R}} - \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{K}}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{a}}} + \mathbf{K}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e d\Omega,$$

$$(3.17) \quad \dot{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{K}}^T \dot{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{K}} \dot{\bar{\mathbf{a}}} - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e d\Omega = \\ = (\bar{\mathbf{K}} - \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{K}}) \dot{\bar{\mathbf{a}}} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{K}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e d\Omega.$$

Eliminując w równaniach (3.16), (3.10) i (3.1) wielkości kinematyczne $\dot{\mathbf{a}}$, $\dot{\mathbf{u}}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ otrzymujemy

$$(3.18) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e d\Omega + \\ + \mathbf{D} (\mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{R}} - \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{K}} \dot{\bar{\mathbf{a}}} + \bar{\mathbf{B}} \dot{\bar{\mathbf{a}}}).$$

Ze względu, że $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\boldsymbol{\sigma}, \psi)$ (rów. (3.2)₁), parametr uszkodzenia ψ zależy od historii naprężenia, a \mathbf{D} i \mathbf{B} są funkcjami tylko zmiennych przestrzennych \mathbf{x} , zależność (3.18) uzupełniona związkiem (3.2)₂ przedstawia układ równań różniczkowo-całkowych, w których niewiadomymi są $\boldsymbol{\sigma}$ i ψ .

Analizując prawą stronę równania (3.18) łatwo zauważyć, że zmiany naprężenia w czasie dla dowolnego punktu \mathbf{x} są konsekwencją:

a) lokalnej relaksacji naprężeń spowodowanej lokalną zmianą odkształcenia — pierwszy składnik,

b) redystrybucji naprężeń („przepływu” naprężeń z pozostałej części ciała, gdzie również występuje relaksacja) — drugi składnik,

c) natychmiastowej reakcji sprężystej ciała spowodowanej zmianą warunków brzegowych — trzeci składnik.

3.3. Parametryczne sformułowanie metody elementów skończonych

Na wstępie podajemy, wykorzystane w pracy, niektóre zależności stosowane w metodzie elementów skończonych, por. ZIENKIEWICZ [21], BATHE [22].

Przez ω oznaczamy obszar dwu lub trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej zdefiniowany następująco:

$$\omega = \{(\xi, \eta, \zeta) : -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1, (-1 \leq \zeta \leq 1)\}.$$

Dowolne pole wektorowe \mathbf{u} określone na ω wygodnie jest aproksymować liniową kombinacją funkcji kształtu $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ oraz wartości $u_i = \mathbf{u}(\xi_i)$ w określonych punktach (węzłach) $\xi_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, 2, \dots, P$,

$$(3.19) \quad \mathbf{u}(\xi) = \sum_{i=1}^P N_i(\xi) u_i, \quad \xi \in \omega, N_i(\xi_j) = \delta_{ij}.$$

Odwzorowanie parametryczne obszaru ω na część Ω_E obszaru Ω (element), oznaczane $\Phi_E: \omega \rightarrow \Omega_E$, określa się wzorem

$$(3.20) \quad \Omega_E \ni \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^Q N'_i(\xi) \mathbf{x}_i,$$

gdzie $N'_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, Q$, są innymi funkcjami (kształtu) spełniającymi warunek $N'_i(\xi_j) = \delta_{ij}$, zaś \mathbf{x}_i zawierają współrzędne punktów węzłowych $\xi'_i \in \omega$, ($i = 1, \dots, Q$), w układzie współrzędnych $x, y, (z)$.

Związki (3.19), (3.20) definiują, przy założeniu odwracalności odwzorowania Φ_E , jednoznaczna interpolację parametryczną pola \mathbf{u} na obszarze elementu Ω_E . Dalej stosowane będą izoparametryczne elementy skończone, dla których $P = Q$, $\xi_i = \xi'_i$ oraz $N_i = N'_i$.

Pole wektorowe \mathbf{u} określone na Ω można zatem aproksymować na podstawie wartości węzłowych \mathbf{u}_i określonych w dowolnej liczbie punktów leżących wewnątrz obszaru Ω i na jego brzegu F stosując odpowiedni podział obszaru na elementy, $\Omega \cong \bar{\Omega} = \bigcup_{(E)} \Omega_E$.

Macierz związków geometrycznych. Rozpatrujemy izoparametryczny element $\Omega_E = \Phi_E(\omega)$; przemieszczenia węzłów określone są wektorem $\delta^E = (\delta_1^T, \delta_2^T, \dots, \delta_P^T)^T$, gdzie $\delta_i = (u_i, v_i, w_i)^T$ oznacza przemieszczenia i -tego węzła, a P jest liczbą węzłów elementu Ω_E . Na podstawie (3.19) pole przemieszczeń w elemencie Ω_E określa wzór

$$(3.21) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [N_1^E(\mathbf{x})\mathbf{I}_3, \dots, N_P^E(\mathbf{x})\mathbf{I}_3] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_P \end{array} \right\} = \mathbf{N}^E \delta^E, \quad \mathbf{x} \in \Omega_E,$$

gdzie $N_i^N(\mathbf{x}) = N_i(\xi)|_{\xi = \Phi_E^{-1}(\mathbf{x})}$, zatem dla węzła $\mathbf{x}_j = \Phi_E(\xi_j)$, $N_i^E(\mathbf{x}_j) = N_i(\xi_j) = \delta_{ij}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j) = \delta_j$, ponadto \mathbf{I}_k oznacza ogólnie k -wymiarową macierz jednostkową, we wzorze (3.21) $k = 3$.

Z (3.1)₂ otrzymujemy odkształcenia w elemencie

$$(3.22) \quad \boldsymbol{\varepsilon}^E = \mathbf{L}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{L}(N^E \boldsymbol{\delta}^E) = [\mathbf{B}_1^E, \dots, \mathbf{B}_p^E] \boldsymbol{\delta}^E = \mathbf{B}^E \boldsymbol{\delta}^E,$$

gdzie $\mathbf{B}_i^E = \mathbf{L}(N_i^E \mathbf{I}_3)$. Pochodne $\{\partial N_i^E / \partial \mathbf{x}\}$ określa się przez $\{\partial N_i^E / \partial \xi\}$ według wzoru

$$(3.23) \quad \{\partial N_i^E / \partial \mathbf{x}\} = [J^{-1}]^T \{\partial N_i^E / \partial \xi\},$$

gdzie $[J] = [\partial \mathbf{x} / \partial \xi]$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania (3.20).

Powyższe związki dla płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia mają postać

$$(3.24) \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [N_1^E \mathbf{I}_2, \dots, N_p^E \mathbf{I}_2] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_p \end{Bmatrix} = N^E \boldsymbol{\delta}^E, \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^E = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \mathbf{u} = [\mathbf{B}_1^E, \dots, \mathbf{B}_p^E] \boldsymbol{\delta}^E = \mathbf{B}^E \boldsymbol{\delta}^E,$$

$$\mathbf{B}_i^E = \begin{bmatrix} \partial N_i^E / \partial x & 0 \\ \partial N_i^E / \partial y & \partial N_i^E / \partial x \\ 0 & \partial N_i^E / \partial y \end{bmatrix},$$

a w przypadku osiowej symetrii (r, ϑ, z — współrzędne walcowe, oś z pokrywa się z osią symetrii):

$$(3.25) \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = [N_1^E \mathbf{I}_2, \dots, N_p^E \mathbf{I}_2] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_p \end{Bmatrix} = N^E \boldsymbol{\delta}^E, \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} u_{ir} \\ u_{iz} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^E = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\vartheta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \\ 0 & \partial/\partial z \\ 1/r & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = [\mathbf{B}_1^E, \dots, \mathbf{B}_p^E] \boldsymbol{\delta}^E = \mathbf{B}^E \boldsymbol{\delta}^E,$$

$$\mathbf{B}_i^E = \begin{bmatrix} \partial N_i^E / \partial r & 0 \\ \partial N_i^E / \partial z & \partial N_i^E / \partial r \\ 0 & \partial N_i^E / \partial z \\ N_i^E / r & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz pochodnej (Jacobiego) odwzorowania (3.20) ma w przypadku

dwuwymiarowym postaci

$$(3.26) \quad [J] = \begin{bmatrix} \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}.$$

Macierz stałych sprężystości D. Macierz tę wyznacza się ze związków liniowej sprężystości (notacja tensorowa),

$$(3.27) \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

dla przyjętej definicji wektorów stanu naprężenia i odkształcenia.

W przypadku izotropii materiału dla zagadnień trójwymiarowych mamy

$$(3.28) \quad E_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

oraz

$$(3.29) \quad \mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k & 0 & 0 \\ \text{(sym)} & & & & k & 0 \\ & & & & & k \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad k = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

E jest modułem Younga, a ν współczynnikiem Poissona.

Dla zagadnień płaskich i osiowo-symetrycznych, uwzględniając wyrażenia (3.24) i (3.25) definiujące ε mamy:

dla płaskiego stanu naprężenia

$$(3.30) \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dla osiowej symetrii i płaskiego stanu odkształcenia

$$(3.31) \quad \mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{\nu} & \bar{\nu} \\ & k & 0 & 0 \\ & & 1 & \bar{\nu} \\ \text{(sym)} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Uogólnienie związków dotyczących elementu na cały obszar. Przedstawione w p. 3.2 związki dotyczą całego obszaru i mogą być efektywnie zastosowane do obszarów o prostym kształcie geometrycznym. Obszary Ω o złożonym geometrycznie kształcie przybliża się elementami skończonymi Ω_E połączonymi w skończonej liczbie punktów (węzłów), $\Omega \cong \bar{\Omega} = \bigcup_{(E)} \Omega_E$. Jako parametry \mathbf{a} ,

$\bar{\mathbf{a}}$ przemieszczeń $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ przyjmuje się po prostu przemieszczenia węzłów δ_i , co oprócz prostej interpretacji fizycznej pozwala, zgodnie z (3.21), określać przemieszczenia wewnątrz elementu w zależności tylko od przemieszczeń węzłów związanych z danym elementem. Zatem, dla $\mathbf{x} \in \Omega_E \subset \Omega$ mamy

$$(3.32) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{N}}\delta = [N_1 \mathbf{I}_3, N_2 \mathbf{I}_3, \dots, N_{nw} \mathbf{I}_3](\delta_1^T, \delta_2^T, \dots, \delta_{nw}^T)^T,$$

gdzie nw oznacza liczbę wszystkich węzłów konstrukcji, δ jest wektorem zawierającym składowe przemieszczenia węzłów, zaś $\hat{\mathbf{N}}$ oznacza macierz funkcji kształtu określoną następująco:

$$N_i = \begin{cases} N_i^E(\mathbf{x}) & \text{jeżeli węzeł } i \text{ jest węzłem elementu } \Omega_E \ni \mathbf{x}, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zależność (3.32) (ważną dla całego obszaru) łatwo przekształca się do postaci zgodnej z (3.10). W tym celu (3.32) zapisujemy w formie indeksowej:

$$u_i = \sum_{j=1}^k \hat{N}_{ij} \delta_j, \quad \hat{\mathbf{N}} = [\hat{N}_{ij}],$$

$$\delta = \{\delta_j\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad k = 3nw.$$

Niech Π oznacza permutację, która przekształca ciąg $\{1, 2, \dots, k\}$ w ciąg $\{\Pi(1), \Pi(2), \dots, \Pi(k)\}$ taki, że w wektorze $(\delta_{\Pi(1)}, \delta_{\Pi(2)}, \dots, \delta_{\Pi(k)})$ n pierwszych składowych oznacza przemieszczenia, które nie są ograniczone żadnymi warunkami, podczas gdy $m = k - n$ pozostałych odpowiada określonym warunkom brzegowym. Wówczas można napisać

$$u_i = \sum_{j=1}^k \hat{N}_{ij} \delta_j = \sum_{j=1}^k \hat{N}_{i,\Pi(j)} \delta_{\Pi(j)} = \sum_{j=1}^n \hat{N}_{i,\Pi(j)} \delta_{\Pi(j)} + \sum_{j=1}^m \hat{N}_{i,\Pi(n+j)} \delta_{\Pi(n+j)}.$$

Oznaczając przez

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, \dots, a_n)^T = (\delta_{\Pi(1)}, \dots, \delta_{\Pi(n)})^T, \\ \bar{\mathbf{a}} &= (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)^T = (\delta_{\Pi(n+1)}, \dots, \delta_{\Pi(n+m)})^T, \\ \mathbf{N} &= [\hat{N}_{i,\Pi(j)}], \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \bar{\mathbf{N}} &= [\hat{N}_{i,\Pi(n+j)}], \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

związek (3.32) napisać można w postaci

$$(3.34) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\mathbf{a} + \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Zatem po wyznaczeniu macierzy $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ i $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{N}}$ (\mathbf{L} jest dane przez związek (3.5)) określić można (całkując po obszarze Ω odpowiednie wielkości) macierz współczynników i wektor prawych stron układu (3.11).

Wpływ przemieszczenia określonego węzła na przemieszczenia w konstrukcji ograniczony jest do sąsiednich elementów zawierających ten węzeł, (3.32).

Powoduje to, że w macierzach $\mathbf{N}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$, $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ zerują się segmenty odpowiadające węzłom, które nie należą do elementu $\Omega_E \ni \mathbf{x}$. Macierz sztywności układu ma budowę pasmową co pozwala na stosowanie efektywnych procedur rozwiązywania układu równań dla zagadnień o dużej liczbie stopni swobody. Sam proces wyznaczania macierzy sztywności i wektorów sił sprowadza się do dwóch etapów. W pierwszym wyznaczane są wielkości lokalne, np. $\mathbf{K}^E = \int_{\Omega_E} (\mathbf{B}^E)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^E d\Omega$, $\mathbf{F}^E = \int_{\Omega_E} (\mathbf{N}^E)^T \mathbf{f} d\Omega$, zwykle metodami numerycznymi stosując określone kwadratury. W następnym etapie macierze te lokalizowane są w tablicach globalnych, np. sztywności, sił – odpowiednio do przyjętej numeracji węzłów w konstrukcji i w elemencie oraz stosownie do warunków brzegowych.

Całkowanie numeryczne – wyznaczanie macierzy sztywności i uogólnionych sił węzłowych. Jak wynika z (3.11)–(3.14) wyznaczenie macierzy sztywności i wektorów uogólnionych sił wymaga całkowania po objętości ciała Ω . Obszar ten przy podziale na elementy aproksymowany jest przez $\bar{\Omega} = \bigcup_{(E)} \Omega_E$, zatem dla dowolnej funkcji $g(\mathbf{x})$ można napisać

$$(3.35) \quad \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\Omega \cong \int_{\bar{\Omega}} g(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{(E)} \int_{\Omega_E} g(\mathbf{x}) d\Omega.$$

Każdy element Ω_E jest dyfeomorficznym obrazem obszaru jednostkowego $\omega: \Omega_E = \Phi_E(\omega)$, Φ_E określone jest wzorem (3.20). Całki w (3.35) wyznacza się zazwyczaj wykorzystując twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie,

$$(3.36) \quad \int_{\Omega_E} g(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\omega} g(\mathbf{x}(\xi)) \Delta d\omega,$$

gdzie $\Delta = |\det J|$ jest modułem jacobianu odwzorowania (3.20), zaś $d\omega = d\xi d\eta d\zeta$.

Dla dwuwymiarowych zagadnień płaskich, ($g(\mathbf{x}) = g(x, y)$), mamy: $\Delta = h|\det J|$, gdzie $\det J$ jest wyznacznikiem macierzy (3.26), $d\omega = d\xi d\eta$, h oznacza grubość elementu (może być zmienna).

Dla zagadnień osiowo-symetrycznych, ($g(\mathbf{x}) = g(r, z)$), gdzie obszar Ω_E jest pierścieniem powstałym przez obrót dwuwymiarowego obszaru $\bar{\Omega}_E = \Phi_E(\omega)$, otrzymujemy

$$(3.37) \quad \int_{\Omega_E} g(r, z) d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_E} \int_0^{2\pi} r g(r, z) d\theta d\tilde{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}_E} 2\pi r g(r, z) d\tilde{\Omega} = \\ = \int_{\omega} 2\pi r(\xi) g(r(\xi), z(\xi)) |\det J| d\xi d\eta.$$

Zatem w tym przypadku we wzorze (3.36) wystarczy przyjąć $d\omega = d\xi d\eta$, $\Delta = 2\pi r |\det J|$, gdzie $\det J$ jest jak poprzednio wyznacznikiem macierzy (3.26).

W praktyce całki typu (3.35) występujące w (3.11)–(3.14) wyznacza się

w sposób przybliżony. Całkę po prawej stronie (3.36) zastępuje się odpowiednią kwadraturą. Ostatecznie otrzymuje się

$$(3.38) \quad \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\Omega \cong \sum_{i=1}^G c_i g(\mathbf{x}_i),$$

gdzie współczynniki c_i oznaczają wagi objętościowe związane z punktami całkowania \mathbf{x}_i . W programie korzystano z kwadratur GAUSSA, [23].

4.4. Całkowanie numeryczne. Równoważny układ równań różniczkowych zwyczajnych

Jak stwierdzono w p. 3.2, naprężenia $\sigma(\mathbf{x}, t)$ są podstawową niewiadomą w rozpatrywanym zagadnieniu pełzania konstrukcji. Dyskretyzacja wszystkich wielkości kinematycznych poprzez uzależnienie przemieszczeń od skończonej liczby parametrów wg zależności $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a} + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{a}}$, nie powoduje istotnego ułatwienia ze względu na różniczkowo-całkowy charakter związku (3.18).

W dalszych rozważaniach wyeliminowana będzie, dzięki wykorzystaniu metod całkowania numerycznego po obszarze Ω , zależność powyższych związków od współrzędnych przestrzennych.

Wszystkie całki objętościowe przedstawić można (aproksymować) w postaci ważonych sum wartości funkcji podcałkowych wziętych w punktach całkowania, zgodnie ze wzorem (3.38). Wybór konkretnej kwadratury ograniczony jest tylko przez warunek, aby wagi c_i w (3.38) były dodatnie. Wyklucza to kwadratury, w których wystąpić mogą ujemne wagi (np. metody Newtona-Cotesa) oraz odwzorowania Φ_E dla elementów izoparametrycznych, których jacobian jest ujemny. Postulat aby wagi c_i były dodatnie powoduje, że rozpatrywane macierze będą określone (dodatnio lub ujemnie).

Podójście takie pozwala rozpatrywać zmienne pola wektorowe σ, ε^c itd. tylko w punktach całkowania. Zatem dalsze rozważania dotyczyć będą skończonej liczby lokalnych wartości zmiennych, które przedstawione zostaną w postaci „zbiorczych” wektorów. Relacje między nimi opisane będą poprzez odpowiednie „zbiorcze” macierze.

Oznaczmy w tym celu:

$$(3.39) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_G \end{Bmatrix}, & \mathfrak{E}^c &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^c \\ \varepsilon_2^c \\ \vdots \\ \varepsilon_G^c \end{Bmatrix}, & \Sigma &= \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_G \end{Bmatrix}, & \mathfrak{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_G \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{B} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_G \end{Bmatrix}, & \bar{\mathfrak{B}} &= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{B}}_G \end{Bmatrix}, & \mathfrak{C} &= \begin{bmatrix} c_1 \mathbf{I}_6 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_2 \mathbf{I}_6 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & c_G \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$(3.40) \quad \mathbb{C}\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{C},$$

$$(3.41) \quad \dot{\Sigma} = \mathbb{D}(\mathbb{C} - \mathbb{C}^c)$$

$$(3.42) \quad \mathbb{E} = \mathbb{B}a + \mathbb{B}\bar{a}, \quad \text{gdzie } a = \mathbf{a}, \bar{a} = \bar{\mathbf{a}} \text{ (wektory przemieszczeń).}$$

Macierze sztywności napisać można w postaci

$$(3.43) \quad \mathbb{R} = \mathbb{B}^T \mathbb{C} \mathbb{D} \mathbb{B}, \quad \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{B}^T \mathbb{C} \mathbb{D} \bar{\mathbb{B}}, \quad \bar{\bar{\mathbb{R}}} = \mathbb{B}^T \mathbb{C} \mathbb{D} \bar{\bar{\mathbb{B}}}.$$

Równanie (3.18) zapisać można teraz w dyskretnej formie

$$(3.44) \quad \dot{\Sigma} = \mathbb{S} \mathbb{C} \mathbb{C}^c + \mathbb{P},$$

gdzie macierz

$$(3.45) \quad \mathbb{S} = \mathbb{D} \mathbb{B} \mathbb{R}^{-1} \mathbb{B}^T \mathbb{D} - \mathbb{D} \mathbb{C}^{-1}$$

jest stałą symetryczną macierzą niedodatnio określoną (por. [24]), natomiast

$$(3.46) \quad \mathbb{P} = \mathbb{D} \mathbb{B} \mathbb{R}^{-1} \bar{\mathbb{R}} + \mathbb{D} (\mathbb{B} - \mathbb{B} \mathbb{R}^{-1} \bar{\mathbb{R}}) \dot{\bar{a}}$$

jest wektorem uwzględniającym efekty zmiennych w czasie, danych obciążeń i przemieszczeń.

Równanie konstytutywne pełzania przedstawić można formalnie w postaci

$$(3.47) \quad \dot{\mathbb{E}} = \dot{\mathbb{E}}(\Sigma, \Phi),$$

przy czym Φ jest wektorem, którego składowe $\psi_i(t)$ określają wartości parametru uszkodzenia w i -tym punkcie całkowania.

Zatem zależność (3.44) jest układem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu dla naprężeń w punktach całkowania. Równania (3.44) dodatkowo uzupełnione są związkami konstytutywnymi opisującymi zmiany ψ we wszystkich punktach całkowania

$$(3.48) \quad \dot{\psi}_i = -\frac{A}{\varphi_i^v} \varphi^v(\sigma_i), \quad i = 1, 2, \dots, G.$$

Warunki początkowe dla układu równań (3.44) i (3.48) w chwili początkowej $t_0 = 0$ dane są przez naprężenia sprężyste w rozpatrywanym obszarze Ω dla określonych warunków brzegowych i danych obciążeń, a parametr $\psi = 1$ w całym obszarze.

W procesie pełzania postępujące uszkodzenie materiału odzwierciedla monotonicznie malejąca wartość parametru ψ od wartości początkowej 1 do 0 w momencie całkowitego uszkodzenia materiału. Ze względów numerycznych moment zlokalizowanego „pęknięcia” $t = t_r$ określany będzie gdy ψ osiągnie wartość ψ_{gr} bliską zera (dodatnią). Powstające w trakcie pełzania strefy zniszczenia eliminowane będą z konstrukcji aż do momentu kiedy konstrukcja jako całość nie jest już w stanie przenosić obciążenia zewnętrznego.

Ze względu na przyjętą postać związków konstytutywnych (3.2) oraz ograniczenie $0 < \psi_{gr} \leq \psi \leq 1$ prawe strony równań (3.44) i (3.48) są ciągłe, mają ciągłe i ograniczone pochodne. Zapewnia to istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia spełniającego określone wyżej warunki początkowe.

4. CAŁKOWANIE PO CZASIE UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

4.1. Ogólny algorytm całkowania. Metoda Eulera

Niech stan ciała w chwili $t = t_n$ określony będzie przez znane wartości sił masowych \mathbf{f}_n , obciążenia \mathbf{t}_n na Γ_t , przemieszczenia $\bar{\mathbf{a}}_n$ na Γ_u oraz wielkości wynikające z całej historii deformacji: $\mathbf{a}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^c, \boldsymbol{\sigma}_n, \psi_n$. W powyższych oznaczeniach i dalej stosujemy notację $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{h}_n(\mathbf{x})$.

Jeżeli znane są w przedziale czasu $(t_n, t_n + \Delta t_n)$ prędkości odkształceń pełzania $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$ i prędkości zmian parametru uszkodzenia $\dot{\psi}$, to wówczas możemy wyznaczyć odpowiednie przyrosty

$$(4.1) \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^c = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t_n} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c dt, \quad \Delta \psi_n = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t_n} \dot{\psi} dt,$$

które z kolei umożliwiają określenie odkształceń pełzania i parametru ψ w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$,

$$(4.2) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad \psi_{n+1} = \psi_n + \Delta \psi_n.$$

Równania równowagi (3.11) w chwili $t = t_{n+1}$ mają postać

$$(4.3) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \bar{\mathbf{K}} \\ \bar{\mathbf{K}}^T & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{n+1} \\ \bar{\mathbf{a}}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{n+1} \\ \mathbf{R}_{n+1} \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T \end{Bmatrix} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c d\Omega.$$

Ponieważ $\bar{\mathbf{a}}_{n+1}, \bar{\mathbf{R}}_{n+1}$ są wielkościami znanymi, z układu równań (4.3) wyznaczyć można przemieszczenia węzłów i reakcje

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1} &= \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{n+1} - \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c d\Omega, \\ \mathbf{R}_{n+1} &= \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{a}_{n+1} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{a}}_{n+1} + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c d\Omega, \end{aligned}$$

a następnie pozostałe wielkości:

$$(4.5) \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{N} \mathbf{a}_{n+1} + \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{a}}_{n+1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{B} \mathbf{a}_{n+1} + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}}_{n+1},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c).$$

Równania równowagi spełnione są również w chwili $t = t_n$, zatem układ

(4.3) napisać można dla odpowiednich przyrostów w równoważnej postaci

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \bar{\mathbf{K}} \\ \bar{\mathbf{K}}^T & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a}_n \\ \Delta \bar{\mathbf{a}}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{R}}_n \\ \Delta \mathbf{R}_n \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T \end{Bmatrix} \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c d\Omega.$$

Wyznaczając z powyższego układu równań $\Delta \mathbf{a}_n$ dostajemy $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta \mathbf{a}_n$ i pozostałe wielkości określamy ze związków (4.5).

Uzyskane wielkości w chwili $t = t_{n+1}$ są wartościami początkowymi dla kolejnego kroku Δt_{n+1} , w analogiczny sposób wyznacza się wartości przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w czasie $t_{n+2} = t_{n+1} + \Delta t_{n+1}$.

Podstawową trudnością w tak określonej metodzie rozwiązania zgadnienia pełzania jest fakt, że prędkości $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$ i $\dot{\psi}$ w związkach (4.1) znane są tylko dla $t = t_n$. Zatem nie jest możliwe dokładne obliczenie całek z tych wielkości w przedziale $(t_n, t_n + \Delta t_n)$. W związku z tym konieczna jest dalsza aproksymacja numeryczna zagadnienia. Istnieje wiele metod całkowania numerycznego począwszy od prostych metod jednokrokowych do bardziej skomplikowanych wielokrokowych. W pracy wykorzystano metodę Eulera, która jest typu *explicite*. Możliwe jest oczywiście stosowanie metod wyższego rzędu, typu *implicite*, jednakże ze względu na nieliniowy charakter związków konstytutywnych konieczne staje się stosowanie iteracyjnych metod rozwiązania. Zwiększa to znacznie wymagany obszar pamięci oraz liczbę operacji dla każdego przyrostu czasu Δt . Uzyskanie rozwiązania, tzn. pełnej historii wszystkich wielkości do momentu zniszczenia konstrukcji, metodami wyższych rzędów mogłoby okazać się nieekonomiczne ze względu na koszt wykonania obliczeń komputerowych. Ponadto błąd aproksymacji rozwiązania związany jest nie tylko z całkowaniem numerycznym po czasie lecz również z błędem powstającym przy dyskretyzacji przestrzennej. Pomiedzy aproksymacją przestrzenną i czasową powinna być zachowana pewna równowaga; stosowanie dokładniejszych metod całkowania nie jest specjalnie uzasadnione.

Metoda Eulera. Przyrosty odkształceń pełzania i wartości parametru ψ określone przez (4.1) aproksymować można w najprostszy sposób zakładając, że prędkości tych zmiennych w przedziale czasu $(t_n, t_n + \Delta t_n)$ są ustalone i równe prędkościom w chwili t_n . Otrzymujemy zatem

$$(4.7) \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^c \cong \Delta t_n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^c, \quad \Delta \psi_n \cong \Delta t_n \dot{\psi}_n.$$

Dla tak określonych wielkości otrzymujemy z układu (4.3) lub (4.6) przemieszczenia \mathbf{a}_{n+1} , a następnie z (4.2) i (4.5) wartości wszystkich zmiennych w chwili t_{n+1} . Stanowią one punkt wyjścia do wykonania kolejnego etapu obliczeń dla przyrostu Δt_{n+1} .

Przyjęta w poprzednim rozdziale metoda całkowania numerycznego w rozpatrywanym obszarze Ω powoduje, że interesują nas wartości naprężeń, odkształceń, parametru ψ tylko w punktach całkowania. Jak stwierdzono wcześniej, podejście takie pozwala opisać problem pełzania poprzez układ

równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu postaci (3.44), (3.48).

Związki (4.7) napisane dla odpowiadających „zbiorczych” wektorów mają postać

$$(4.8) \quad \Delta \mathbb{E}_n^c = \Delta t_n \mathbb{E}_n^c, \quad \Delta \Phi_n = \Delta t_n \dot{\Phi}_n.$$

Zatem dla $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ otrzymujemy

$$(4.9) \quad \mathbb{E}_{n+1}^c = \mathbb{E}_n^c + \Delta \mathbb{E}_n^c, \quad \Phi_{n+1} = \Phi_n + \Delta \Phi_n$$

oraz

$$(4.10) \quad \Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \mathbb{E} \mathbb{E} \Delta \mathbb{E}_n^c + \Delta \mathbb{B}_n.$$

Metoda Eulera jest metodą pierwszego rzędu. Dla dowolnej chwili t błąd maleje proporcjonalnie do Δt przy $\Delta t \rightarrow 0$.

Problem określenia długości kroku czasowego związany jest z dokładnością obliczeń. Lepszą dokładność uzyskać można dla krótszych przyrostów czasu. Jednakże zmniejszenie Δt powoduje, że uzyskanie rozwiązania zagadnienia w przedziale $(0, t_r)$ wymaga większej liczby kroków, co zwiększa koszty obliczeń. Postać związków fizycznych opisujących prędkość zmian odkształceń pełzania i parametru uszkodzenia wymaga, aby długość kroku czasowego była zmienna w czasie. W szczególności gdy ψ zbliża się do ψ_{gr} bliskiego zera konieczne jest znaczne zagęszczenie podziału czasowego.

W następnej części pracy przedstawione zostaną rozważania, które wykorzystując własności układu równań (3.44) i przyjętej metody całkowania Eulera prowadzą do oszacowania długości kroku czasowego zapewniającego stabilność rozwiązania.

4.2. Dokładność obliczeń, określenie długości kroku czasowego

W rozdziale 3 pokazano, że dyskretyzacja zagadnienia prowadzi do nieliniowego układu równań różniczkowych zwyczajnych w postaci

$$(4.11) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t).$$

Wykorzystując tw. Taylora można aproksymować (4.11) w otoczeniu punktu $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n)$,

$$(4.12) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \mathbf{J}_n (\mathbf{y} - \mathbf{y}_n) + O(\mathbf{y} - \mathbf{y}_n)^2,$$

gdzie $\mathbf{J}_n = (\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_n}$ jest macierzą pochodnej funkcji \mathbf{f} .

Ciągłość funkcji \mathbf{f} i ograniczoność normy $\|\mathbf{J}_n\| < \infty$ jest warunkiem wystarczającym istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu (4.11) spełniającego dane warunki początkowe.

Dalej badanie własności układu (4.11) ograniczone będzie do badania

zlinearyzowanej postaci (4.12) otrzymanej przez pominięcie wyrazu drugiego stopnia.

Powstający błąd $\varepsilon_n = \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}(t_n)\|$ zależy od długości kroku czasowego Δt , ($\mathbf{y}(t_n)$ oznacza rozwiązanie dokładne w chwili t_n , a \mathbf{y}_n rozwiązanie przybliżone po n krokach). Aby błąd ten był ograniczony przy liczbie przyrostów czasu dążącej do nieskończoności, długość kroku Δt musi być odpowiednio mała. Podane w [25], [26] oszacowanie

$$(4.14) \quad 0 < \Delta t < \frac{2}{|\lambda|},$$

gdzie λ oznacza wartość własną macierzy Jacobiego o największym module i zapewnia numeryczną stabilność metody Eulera.

Ze względu na nieliniowy charakter (4.11) konieczne jest wyznaczenie wartości własnej o największym module $|\lambda|_{\max}$ (lub górnego oszacowania) macierzy \mathbf{J}_n w każdym kroku czasowym i dla każdego punktu całkowania przestrzennego. Jakkolwiek jest to zawsze możliwe na drodze numerycznej, to może okazać się, że taki sposób jest nieekonomiczny z punktu widzenia kosztów wielokrotnie powtarzanych obliczeń dla każdego kroku czasowego. Pożądane zatem jest otrzymanie $|\lambda|_{\max}$ na drodze analitycznej. Zagadnienie to w przypadku quasi-statycznym sprężysto/lepkoplastyczności było przedmiotem pracy [24]. Ten sposób postępowania zastosujemy w rozpatrywanym zagadnieniu pełzania.

Rozpatrujemy układ równań (3.44), (3.48) opisujący zagadnienie pełzania. Prędkość zmiany parametru ψ w dowolnym punkcie całkowania \mathbf{x}_i zależy tylko od wartości ψ i σ w tym punkcie, ponadto poszczególne wartości ψ_i nie są ze sobą związane. Powyższe równania są uzupełnione związkami konstytutywnymi zapisanymi w postaci (3.47) lub podanymi w postaci jawnej (2.7) dla $\sigma = \sigma_i$. Układ ten będzie całkowany metodą Eulera.

Niech w chwili $t = t_n$ będą znane wszystkie wielkości określające stan ciała Ω . Dla przyrostu czasu Δt_n wartości ψ w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ wynoszą

$$(4.14) \quad \psi_{i(n+1)} = \psi_{in} + \Delta t_n \dot{\psi}_{in},$$

gdzie przyjęto oznaczenie $\psi(\mathbf{x}_i, t_n) = \psi_{in}$. Podobnie, wykorzystując (3.44) otrzymujemy przyrost naprężenia

$$(4.15) \quad \Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \Delta t_n \dot{\Sigma}_n = \Sigma_n + \Delta t_n [\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}^c(\Sigma_n, \Phi_n) + \mathfrak{B}_n].$$

Łatwo zauważyć, że stosując metodę Eulera identyczne rozwiązanie dla t_{n+1} otrzymujemy z układu równań

$$(4.16) \quad \dot{\Sigma} = \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}^c(\Sigma, \Phi = \Phi_n) + \mathfrak{B}, \quad t > t_n.$$

Powyższy układ różni się od (3.44) tym, że w (4.16) wartość ψ jest ustalona i równa wartościom parametru uszkodzenia w rozpatrywanej chwili t_n . Zatem prawe strony układu (4.16) zależą jedynie od naprężeń Σ . Dopuszczalną

wartość kroku czasowego Δt_n wyznaczmy ze wzoru (4.13) dla układu równań (4.16).

Niech \mathbf{H} oznacza lokalną macierz postaci

$$(4.17) \quad \mathbf{H} = \partial \dot{\mathbf{x}}^c / \partial \boldsymbol{\sigma},$$

na podstawie której określić można odpowiednią, zbiorczą macierz

$$(4.18) \quad \mathfrak{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{H}_G \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{H}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{H}.$$

Macierz Jacobiego układu równań (4.16)

$$(4.19) \quad \mathfrak{J} = \delta \dot{\Sigma} / \delta \Sigma = \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{H}$$

określa interesujące nas zagadnienie wartości własnych

$$(4.20) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{H}) \mathfrak{B} = \lambda \mathfrak{B},$$

gdzie \mathfrak{B} oznacza wektory własne, a λ wartości własne.

Możliwość określenia górnej granicy największej co do modułu wartości własnej związana jest z postacią związków konstytutywnych.

Założmy, że macierz \mathbf{H} jest symetryczna i dodatnio określona, a zatem również \mathfrak{H} określona związkiem (4.18) jest symetryczna i dodatnio określona, co zapisujemy

$$(4.21) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^T > 0.$$

Ponadto przyjęte w części 3.3 założenie ograniczające wybór kwadratur do takich, które zapewniają wagi $c_i > 0$ prowadzi do związku

$$(4.22) \quad \mathfrak{C}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{C} > 0.$$

Zatem wartości własne \mathfrak{J} są rzeczywiste, niedodatnie, ponieważ \mathfrak{J} jest iloczynem dodatnio określonej macierzy $\mathfrak{C}\mathfrak{H}$ i macierzy określonej niedodatnio,

$$(4.23) \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}^T \leq 0.$$

Zamiast zagadnienia wartości własnych opisanego równaniem (4.20) rozpatrywać można równoważny problem dla macierzy transponowanej

$$(4.24) \quad (\mathfrak{H}\mathfrak{C}\mathfrak{C}) \mathfrak{B} = \lambda \mathfrak{B},$$

który daje identyczne wartości własne, zmieniają się tylko wektory własne, lub alternatywnie z uwagi na (4.22) uogólniony (symetryczny) problem wartości własnych

$$(4.25) \quad \mathfrak{C}\mathfrak{B} = \lambda (\mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{H}^{-1}) \mathfrak{B}.$$

Współczynnik Rayleigha zagadnienia (4.25) dla dowolnego wektora \mathbf{x} (odpowiedniego wymiaru) jest niedodatni,

$$(4.26) \quad Q(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathfrak{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{H}^{-1} \mathbf{x}} \leq 0,$$

a ekstremalna wartość własna wynosi

$$(4.27) \quad |\lambda|_{\max} = \max_{\mathbf{x}} |Q(\mathbf{x})|.$$

Podstawiając \mathfrak{S} według (3.45) do (4.26) oraz uwzględniając (4.23) i dodatnią określoność macierzy \mathfrak{R}^{-1} (więc również $\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{B}^T\mathfrak{D}$) otrzymujemy następnie z (4.27) następujący wynik:

$$(4.28) \quad |\lambda|_{\max} = \max_{\mathbf{x}} \left(\frac{\mathbf{x}^T \mathfrak{D}\mathfrak{C}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{H}^{-1} \mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{B}^T \mathfrak{D} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{H}^{-1} \mathbf{x}} \right).$$

Pomijając w (4.28) drugi składnik otrzymujemy oszacowanie

$$(4.29) \quad |\lambda|_{\max} < \lambda_{\max}^* = \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathfrak{D}\mathfrak{C}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{H}^{-1} \mathbf{x}} = \max_{\mathbf{x}} Q^*(\mathbf{x}),$$

gdzie Q^* jest współczynnikiem Rayleigha związanym z nowym zagadnieniem wartości własnych $(\lambda^*, \mathfrak{B})$ określonym przez

$$(4.30) \quad (\mathfrak{D}\mathfrak{C}^{-1}) \mathfrak{B}^* = \lambda^* (\mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{H}^{-1}) \mathfrak{B}^*.$$

Mnożąc (4.30) lewostronnie przez \mathfrak{C} i wykorzystując związek $\mathfrak{D}\mathfrak{C}^{-1} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D}$ (wynikający z postaci macierzy \mathfrak{D} i \mathfrak{C}) otrzymujemy

$$(4.31) \quad \mathfrak{D}\mathfrak{B}^* = \lambda^* \mathfrak{H}^{-1} \mathfrak{B}^*$$

lub, mnożąc jeszcze lewostronnie przez \mathfrak{H} ,

$$(4.32) \quad (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) \mathfrak{B}^* = \lambda^* \mathfrak{B}^*.$$

Z uwagi, że macierz \mathfrak{H} zależy od naprężeń wygodniej jest ze względu na łatwość wyznaczania współczynnika Rayleigha, rozpatrywać zagadnienie (4.32) dla macierzy transponowanej $(\mathfrak{H}\mathfrak{D})^T = \mathfrak{D}^T \mathfrak{H}^T = \mathfrak{D}\mathfrak{H}$, które ma identyczne wartości własne

$$(4.33) \quad (\mathfrak{D}\mathfrak{H}) \mathfrak{B}^* = \lambda^* \mathfrak{B}^*.$$

Postać równoważna zagadnienia (4.33)

$$(4.34) \quad \mathfrak{H}\mathfrak{B}^* = \lambda^* \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{B}^*$$

umożliwia wyznaczenie współczynników Rayleigha

$$(4.35) \quad Q^*(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathfrak{H} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathfrak{D}^{-1} \mathbf{x}}$$

We wzorze (4.35) występuje odwrotność macierzy \mathfrak{D} stałej dla jednorodnego materiału, podczas gdy do wyznaczenia współczynnika Rayleigha zagadnienia (4.31) konieczna jest znajomość odwrotności zmiennej macierzy \mathfrak{H} .

Na podstawie (4.35) otrzymujemy oszacowanie

$$(4.36) \quad |\lambda|_{\max} < \lambda_{\max}^* = \max_{\mathbf{x}} \left(\frac{\mathbf{x}^T \mathfrak{H} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathfrak{D}^{-1} \mathbf{x}} \right).$$

Ze względu na blokowo-diagonalną strukturę macierzy \mathfrak{H} i \mathfrak{D} (patrz (4.18), (3.39)), λ_{\max}^* wyznaczyć można przez oddzielne obliczenia w każdym punkcie całkowania:

$$(4.37) \quad |\lambda|_{\max} < \lambda_{\max}^* = \max_{i=1, \dots, G} \left(\max_{\mathbf{v}} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{H}_i \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{v}} \right).$$

Zatem wyznaczenie λ_{\max}^* dające, zgodnie z (4.13), oszacowanie długości kroku czasowego wymaga (ze względu na zależność od aktualnego stanu naprężenia i wartości parametru uszkodzenia) rozwiązania zagadnienia

$$(4.38) \quad (\mathbf{H}\mathbf{D})\mathbf{v} = \lambda^* \mathbf{v},$$

w każdym punkcie całkowania i dla wszystkich kroków czasowych. W ogólnym przypadku zagadnienie takie może być rozwiązane numerycznie. Jak już wcześniej wspomniano, pożądana jest analityczna forma rozwiązania.

Macierz $\mathbf{H} = \partial \dot{\epsilon}^c / \partial \sigma$ określona jest przez związki fizyczne (2.7).

Oznaczmy potencjał określający prędkości odkształceń pełzania przez

$$(4.39) \quad \chi(\sigma_{ij}) = \frac{D}{n+1} = \frac{K \varphi^{n+1}}{\psi^n n+1}$$

tak, że wówczas (patrz (2.9), (2.10))

$$(4.40) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^c = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma_{ij}} = \chi' \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \chi' = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}.$$

Mamy zatem w postaci wektorowej

$$(4.41) \quad \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \sigma^2}.$$

Macierz \mathbf{H} jest macierzą Hesy'ego funkcji χ , skąd wynika symetria $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$. Macierz ta jest dodatnio określona jeśli powierzchnie ekwipotencjalne są ściśle wypukłe. Dla przyjętej funkcji φ (2.13) powierzchnie ekwipotencjalne $\varphi(\sigma_{ij}) = \text{const}$ w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń głównych są walcami

o osi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Macierz \mathbf{H} jest wówczas określona nieujemnie (zerowej krzywiznie głównej odpowiada zerowa wartość własna). Powoduje to, że również \mathfrak{H} określona jest nieujemnie i przekształcenia określone równaniami (4.25) i następnymi nie są dopuszczalne.

Jednakże można wykazać, że oszacowanie (4.37) jest ważne. Macierz perturbowana $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} + \varepsilon \mathfrak{I}$, ($\varepsilon > 0$, \mathfrak{I} – macierz jednostkowa), jest symetryczna, dodatnio określona, zatem wstawiając ją do (4.24) w miejsce \mathfrak{H} otrzymujemy oszacowanie

$$(4.42) \quad |\bar{\lambda}(\varepsilon)|_{\max} < \bar{\lambda}^*(\varepsilon)_{\max} = \max_{i=1, \dots, G} \left(\max_{\mathbf{v}} \frac{\mathbf{v}^T (\mathbf{H}_i + \varepsilon \mathbf{I}) \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}} \right),$$

które dla $\varepsilon \rightarrow 0^+$ przechodzi w (4.37).

W dalszym poszukiwaniu analitycznej postaci λ_{\max}^* korzysta się z następujących czterech uwag:

1. W przypadku izotropowym kierunki główne tensorów σ_{ij} i ε_{ij}^e pokrywają się; lokalne zagadnienie wartości własnych (4.38) odniesione do głównych składowych wymaga rozpatrywania macierzy tylko o wymiarach 3×3 .

2. Dla kierunków głównych macierzy sprężystości (3.29) upraszcza się do postaci

$$(4.43) \quad \mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & \bar{\nu} \\ \bar{\nu} & 1 & \bar{\nu} \\ \bar{\nu} & \bar{\nu} & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Wartości i wektory własne macierzy \mathbf{D} są następujące:

$$(4.44) \quad \lambda_1 = \frac{E}{1-2\nu}, \quad \mathbf{v}_1^{(D)} = (1, 1, 1)^T \quad (\text{hydrostatyczny wektor własny}),$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{E}{1+\nu},$$

dowolny wektor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, którego składowe spełniają warunek $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ jest (dewiatorowym) wektorem własnym.

3. Wektorami własnymi macierzy \mathbf{H} (4.41) (zachodzi równoległość powierzchni ekwipotencjalnych) są: gradient $\partial\chi/\partial\boldsymbol{\sigma}$; wektory styczne do powierzchni $\chi = \text{const}$ wzdłuż linii krzywizn głównych; zerowej krzywiznie odpowiada zerowa wartość własna. Własności te wynikają z twierdzenia Rodriguesa geometrii różniczkowej [27].

4. Wektor, który jest wektorem własnym \mathbf{H} i \mathbf{D} pozwala wyznaczyć wartość własną macierzy $\mathbf{H}\mathbf{D}$ bezpośrednio przez podstawienie z równości (4.38).

Wyznaczając teraz efektywnie macierz (4.41) dla naprężeń głównych

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$, mamy

$$(4.45) \quad \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \sigma^2} = \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \right]_{i,j=1,2,3} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\chi' \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) = \chi'' \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right\} + \chi' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2},$$

gdzie z (4.39),

$$(4.46) \quad \chi' = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{K}{\psi^n} \varphi^n, \quad \chi'' = \frac{K}{\psi^n} n \varphi^{n-1}.$$

oraz na podstawie (2.13), $\varphi = (3I_2)^{1/2} = [3(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)/2]^{1/2}$, gdzie $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^T$ oznacza wektor o składowych dewiatora naprężenia, a ponadto

$$(4.47) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{I_2}} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4(I_2)^{3/2}} \begin{bmatrix} s_1^2 & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ & s_2^2 & s_2 s_3 \\ \text{(sym)} & & s_3^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{I_2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ & 2 & -1 \\ \text{(sym)} & & 2 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$(4.48) \quad \mathbf{H} = \left(\frac{3}{4I_2} \chi'' - \frac{\sqrt{3}}{4(I_2)^{3/2}} \chi' \right) \begin{bmatrix} s_1^2 & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ & s_2^2 & s_2 s_3 \\ \text{(sym)} & & s_3^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{I_2}} \chi' \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ & 2 & -1 \\ \text{(sym)} & & 2 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z uwagą 3 wektor o kierunku normalnym do powierzchni $\chi = \text{const}$ jest wektorem własnym macierzy \mathbf{H} . Ponieważ $\partial \chi / \partial \sigma = \chi' \partial \varphi / \partial \sigma$, gdzie χ' i $\partial \varphi / \partial \sigma$ są dane przez (4.46)₁, i (4.47)₁, a więc

$$(4.49) \quad \mathbf{v}_1^{(H)} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}$$

jest wektorem własnym \mathbf{H} . Wektor ten jest również wektorem własnym \mathbf{D} (suma jego składowych $s_1 + s_2 + s_3 = 0$). Zatem wektor ten jest wektorem

własnym macierzy \mathbf{HD} , $\mathbf{v}_1^{(H)} = \mathbf{v}_1^{(HD)}$. Wykorzystując to w (4.38) wyznaczyć można odpowiadającą mu wartość własną λ_1^* :

$$(4.50) \quad (\mathbf{HD})\mathbf{v}_1^{(HD)} = \mathbf{H}(\mathbf{D}\mathbf{v}_1^{(HD)}) = \mathbf{H}\left(\frac{E}{1+\nu}\mathbf{v}_1^{(HD)}\right) = \dots = \frac{3E}{2(1+\nu)}\chi''\mathbf{v}_1^{(HD)},$$

$$\lambda_1^* = \frac{3E}{2(1+\nu)}\chi''.$$

Wektor styczny do powierzchni walcowej $\chi = \text{const}$ wzdłuż tworzącej (jeden z kierunków krzywizn głównych)

$$(4.51) \quad \mathbf{v}_2^{(H)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

jest wektorem własnym \mathbf{H} , któremu odpowiada zerowa wartość własna. Ponieważ $\mathbf{v}_2^{(H)}$ jest wektorem własnym \mathbf{D} , to jest również wektorem własnym macierzy \mathbf{HD} , któremu odpowiada zerowa wartość własna

$$(4.52) \quad \lambda_2^* = 0.$$

Trzeci wektor własny \mathbf{H} styczny do obwodu powierzchni $\chi = \text{const}$ (kierunek drugiej krzywizny głównej) jest prostopadły do $\mathbf{v}_1^{(H)}$ i $\mathbf{v}_2^{(H)}$, możemy przyjąć np.

$$(4.53) \quad \mathbf{v}_3^{(H)} = \mathbf{v}_2^{(H)} \otimes \mathbf{v}_1^{(H)} = \left\{ \begin{array}{c} s_2 - s_3 \\ s_3 - s_1 \\ s_1 - s_2 \end{array} \right\}.$$

Podobnie jak poprzednio jest to także wektor własny macierzy $\mathbf{D}(s_2 - s_3 + s_3 - s_1 + s_1 - s_2) = 0$ i w konsekwencji jest wektorem własnym \mathbf{HD} , $\mathbf{v}_3^{(HD)} = \mathbf{v}_3^{(H)}$. Odpowiadająca mu wartość własna dla zagadnienia (4.38) wynosi

$$(4.54) \quad \lambda_3^* = \frac{\sqrt{3E}}{2(1+\nu)\sqrt{I_2}}\chi'.$$

Uwzględniając w (4.50) i (4.54) wartości χ'' i χ' dane przez (4.46) otrzymujemy dla stałej materiałowej $n > 1$,

$$(4.55) \quad \lambda_{\max}^* = \lambda_1^* = \frac{3E}{2(1+\nu)}\frac{K}{\psi^n}n\varphi^{n-1},$$

gdzie ν oznacza współczynnik Poissona.

Stąd na podstawie (4.37) i (4.13) otrzymujemy oszacowanie maksymalnej długości kroku czasowego zapewniającego numeryczną stabilność metody Eulera całkowania układu równań różniczkowych (4.16), w postaci

$$(4.56) \quad \Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{\lambda_{\max}^*} = \frac{4(1+\nu)}{3EK} \frac{\psi^n}{n\varphi^{n-1}}.$$

Dla dowolnej chwili t_m wartość Δt_m zależy od aktualnych wartości naprężeń $\sigma_{im} = \sigma(x_i, t_m)$ i $\psi_{im} = \psi(x_i, t_m)$ we wszystkich punktach całkowania Gaussa $x_i (i = 1, 2, \dots, G)$;

$$(4.57) \quad \Delta t_m = \min_{i=1, \dots, G} \left(\frac{4(1+\nu)}{3EK} \frac{\psi_{im}^n}{n\phi^{n-1}(\sigma_{im})} \right).$$

Zatem z (4.16) lub (3.44) otrzymujemy stan naprężenia w chwili $t_{m+1} = t_m + \Delta t_m$,

$$(4.58) \quad \Sigma_{m+1} = \Sigma_m + \Delta t_m \dot{\Sigma}_m.$$

Ta sama wartość Δt_m wykorzystywana będzie do wyznaczania z równań (3.48) wartości parametru uszkodzenia w chwili t_{m+1} w każdym z punktów całkowania,

$$(4.59) \quad \psi_{m+1} = \psi_m + \Delta t_m \dot{\psi}_m = \psi_m - \frac{A}{\psi_m^v} \phi^v(\sigma_m) \Delta t_m.$$

Uzasadnione to jest relacjami pomiędzy stałymi materiałowymi pełzania, które zapewniają zadowalającą (potwierdzoną wynikami numerycznymi) dokładność.

4.3. Powstawanie i rozwój stref uszkodzenia — realizacja numeryczna

Jak już powiedziano, procesy deterioracji materiału prowadzące do przyspieszonego pełzania oraz do powstawania i propagacji stref kruchych pęknięć, wyczerpujących po pewnym czasie nośność konstrukcji, są wyrażone zmianą parametru ψ od wartości jeden w chwili początkowej do zera w momencie pojawienia się pęknięcia, $\psi(t_r) = 0$. Prędkości tych zmian zależą od naprężeń i aktualnej wartości ψ , rów. (2.8).

Jednym z możliwych sposobów uwzględnienia w analizie numerycznej powstających stref uszkodzenia, które nie przenoszą dalej obciążenia ($\psi = 0$) jest usuwanie elementów skończonych z konstrukcji. Jednakże metoda ta [4] jest skomplikowana, powoduje konieczność przenumerowania węzłów i elementów, utworzenia w związku z tym nowych tablic pomocniczych do tworzenia globalnej macierzy sztywności, rozwiązywania układu równań itd.

W pracy proponuje się inny sposób, a mianowicie element, w którym $\psi = 0$ pozostaje w konstrukcji, zmienia się tylko jego własności (macierz sztywności) tak, aby jego wpływ na pracę całej konstrukcji był mały.

$$(4.60) \quad \hat{\mathbf{K}}^{(E)} = \alpha \mathbf{K}^{(E)}, \quad 0 < \alpha \ll 1.$$

Takie osłabienie elementu, a zatem i całej konstrukcji powoduje nagłą (skokową) zmianę stanu równowagi konstrukcji. Wielkość nieciągłości związana jest z rozmiarami osłabionego elementu i stanem naprężenia w tym elemencie bezpośrednio przed pęknięciem. W rzeczywistości powstawanie i rozwój stref uszkodzenia ma charakter ciągły. W dalszych badaniach okaże

się, że skokowy przyrost przemieszczeń i w konsekwencji naprężeń jest mały przy odpowiednio gęstym podziale i zależy od naprężeń w elemencie, które z założenia powinny być małe.

Załóżmy, że w chwili $t = t_m$ określone są wartości przemieszczeń węzłowych \mathbf{a}_m , naprężeń $\boldsymbol{\sigma}_m$, odkształceń całkowitych $\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}\mathbf{a}_m$ i pełzania $\boldsymbol{\varepsilon}_m^c$ oraz, że w elemencie o numerze L wartość parametru $\psi_m < \psi_{gr}$. gdzie ze względów numerycznych ψ_{gr} jest liczbą dodatnią bliską zera (np. $\psi_{gr} = 0,01$), oznacza pojawienie się kruchych pęknięć w elemencie L .

W chwili $t = t_m$ spełnione są równania równowagi

$$(4.61) \quad \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} (\mathbf{B}\mathbf{a}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c) d\Omega = \mathbf{F}_m,$$

gdzie \mathbf{F}_m oznacza obciążenie zewnętrzne, które zapisać można w postaci bardziej przydatnej w dalszych rozważaniach, a mianowicie

$$(4.62) \quad \sum_K \int_{\Omega_K} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_K (\mathbf{B}\mathbf{a}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c) d\Omega = \mathbf{F}_m.$$

W (4.62) Ω_K oznacza element o numerze K , \mathbf{D}_K jest macierzą stałych sprężystości elementu K .

Po zmianie sztywności elementu L , równoważnej zmianie macierzy sprężystości $\hat{\mathbf{D}}_L = \alpha \mathbf{D}_L$, poszukujemy nowego pola przemieszczeń $\hat{\mathbf{a}}_m$ spełniającego warunki równowagi dla nowej macierzy sztywności konstrukcji (po osłabieniu elementu L) przy niezmiennych wartościach odkształceń pełzania i obciążenia zewnętrznego.

Przemieszczenia $\hat{\mathbf{a}}_m$ spełniać muszą zatem równanie

$$(4.63) \quad \sum_K \int_{\Omega_K} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}}_K (\mathbf{B}\hat{\mathbf{a}}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c) d\Omega = \mathbf{F}_m, \quad \hat{\mathbf{D}}_K = \begin{cases} \mathbf{D}_K & \text{dla } K \neq L, \\ \alpha \mathbf{D}_L & \text{dla } K = L. \end{cases}$$

Dodając do obu stron (4.63) wyrażenie

$$(1 - \alpha) \int_{\Omega_L} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_L (\mathbf{B}\hat{\mathbf{a}}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c) d\Omega$$

otrzymujemy

$$\sum_K \int_{\Omega_K} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_K (\mathbf{B}\hat{\mathbf{a}}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c) d\Omega = \mathbf{F}_m + (1 - \alpha) \int_{\Omega_L} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_L (\mathbf{B}\hat{\mathbf{a}}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c) d\Omega.$$

Podstawiając do powyższego związku $\hat{\mathbf{a}}_m = \mathbf{a}_m + \Delta \hat{\mathbf{a}}_m$ oraz wykorzystując (4.63) otrzymujemy po przekształceniach

$$(4.64) \quad \left(\sum_K \int_{\Omega_K} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}}_K \mathbf{B} d\Omega \right) \Delta \hat{\mathbf{a}}_m = (1 - \alpha) \int_{\Omega_L} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_L (\mathbf{B}\mathbf{a}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c) d\Omega.$$

Wyznaczając z (4.64) $\Delta \hat{\mathbf{a}}_m$ otrzymujemy $\hat{\mathbf{a}}_m = \mathbf{a}_m + \Delta \hat{\mathbf{a}}_m$ oraz naprężenia w elementach $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m = \hat{\mathbf{D}}_K (\mathbf{B}\hat{\mathbf{a}}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^c)$. Dalsza analiza pełzania (dla kolejnych przyrostów czasu $\Delta t_m, \Delta t_{m+1}$ itd.) przebiega jak poprzednio, zmieniona jest

tylko macierz konstrukcji $\hat{\mathbf{K}} = \sum_{\kappa} \int_{\Omega_{\kappa}} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}}_{\kappa} \mathbf{B} d\Omega$. Oczywiście w „zniszczonym” elemencie równania (2.14), (2.15) już nie obowiązują. Parametr ψ jest stale równy zero, natomiast przyrosty odkształceń pełzania wyznaczone są ze związku

$$\Delta \epsilon_n^c = \epsilon_n - \epsilon_n^c, \quad n \geq m.$$

Wówczas odkształcenia pełzania w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ mają wartość odkształceń całkowitych w chwili t_n

$$\epsilon_{n+1}^c = \epsilon_n^c + \Delta \epsilon_n^c = \epsilon_n.$$

Powoduje to, że w dalszej analizie wpływ tego elementu jest stale mały, jego oddziaływanie na pozostałą część konstrukcji nie kumuluje się dla kolejnych przyrostów czasu (co miałoby miejsce, gdyby odkształcenia pełzania pozostawały niezmienione).

Czas technicznej użyteczności konstrukcji (czas życia) określa chwila, po której układ traci zdolność do dalszego przenoszenia obciążeń.

Proponowany w tej części pracy sposób numerycznej analizy konstrukcji w stanie przyspieszonego pełzania stał się podstawą opracowania komputerowego programu. W drugiej części tej pracy są prezentowane obliczenia kilku konstrukcji oraz porównania z dostępnymi wynikami innych metod.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. F. ASHBY, M. RAJ, *Creep fracture*, Proceedings of the Conference on the Mechanics and Physics of Fracture, Metal Soc. Inst. Phys., Cambridge 1975.
2. J. HENDERSON, J. D. SNEDDON, *Creep fracture of copper cylindrical bars under pure torque*, National Engineering Laboratory, Report No. 509, 1972.
3. F. A. LECKIE, D. R. HAYHURST, *Creep rupture of structures*, Proc. Roy. Soc., **340**, 323–347, 1974.
4. D. R. HAYHURST, P. R. DIMMER and M. W. CHERNUKA, *Estimates of the creep rupture lifetime of structures using the finite element method*, J. Mech. Phys. Solids, **23**, 335–355, 1975.
5. Yu. N. RABOTNOV, *Creep problems in structural members*, North-Holland, Amsterdam 1969.
6. V. P. SDOBYREV, *Criteria of ultimate strength for various heat-treated alloys in intricate states of stress*, Academy of Sciences, OTN, Mechanics and Mechanical Engineering, **6**, 1959 [in Russian].
7. A. E. JOHNSON, J. HENDERSON, B. KHAN, *Complex stress creep, relaxation and fracture of metallic alloys*, HM Stationary Office Edinburg, 1962.
8. D. R. HAYHURST, *Creep rupture under multiaxial states of stress*, J. Mech. Phys. Solids, **20**, 381–390, 1972.
9. M. CHRZANOWSKI, J. MADEJ, *Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcję parametru uszkodzeń*, Mech. Teoret. Stos., **18**, 4, 1980.
10. L. M. KACZANOV, *Theory of creep*, National Lending Library, Boston Spa 1967.
11. B. F. DYSON, F. A. MCLEAN, *Creep in Nimonic 80A in torsion and tension*, Metal. Sci., **11**, 37–45, 1977.
12. S. MURAKAMI, *Anisotropic damages in metals*, Proc. Coll. Inter. CNRS, Villard-de-Lans, June 1983.

13. B. F. DYSON, M. S. LOVEDAY, M. J. RODGERS, *Grain boundary cavitation under various states of applied stress*, Proc. Roy. Soc. London, A349, 245–259, 1976.
14. I. W. CHEN, A. S. ARGON, *Creep cavitation in 304 stainless steel*, Acta Metal., 29, 1321–1333, 1981.
15. R. LANGEBOG, *Creep: mechanisms and theories*, in: J. BRESSERS [ed.], Creep and Fatigue in High Temperature Alloys, Applied Science, 41–71, 1981.
16. W. A. TRĄMPCZYŃSKI, D. R. HAYHURST, F. A. LECKIE, *Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading*, J. Mech. Phys. Solids, 29, 353–374, 1981.
17. M. BASISTA, *O kontynualnych modelach uszkodzenia materiałów*, Prace IPPT PAN, 40, 1984.
18. L. DAVISON, A. L. STEVENS, M. E. KIPP, *Theory of spall damage accumulation in ductile metals*, J. Mech. Phys. Solids, 25, 11–28, 1977.
19. A. E. JOHNSON, *Complex-stress creep of metals*, Metal. Review, 20, 447–506, 1960.
20. F. A. LECKIE, D. R. HAYHURST, *Constitutive equation for creep rupture*, Acta Metal., 25, 1059–1070, 1977.
21. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
22. K. J. BATHE, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1982.
23. J. A. JANKOWSCY, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1981.
24. I. CORMEAU, *Numerical stability in quasi-static elasto/viscoplasticity*, Int. J. Num. Meth Eng., 9, 109–127, 1975.
25. J. D. LAMBERT, *Computational methods in ordinary differential equations*, Wiley, London 1973.
26. P. J. van der HOUVEN, *Construction of integration formulas for initial value problems*, North-Holland Publ. Comp., 1977.
27. T. TRAJDOS, *Matematyka dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1974.

РЕЗЮМЕ

АНАЛИЗ НЕЗАТУХАЮЩЕЙ ПОЛЗУЧЕСТИ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ
 КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
 ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ

Сформулированы уравнения метода конечных элементов для описания незатухающей ползучести конструкций, подвергнутых воздействию повышенных температур в условиях постоянного во времени нагружения. Принимается аддитивность упругих деформаций, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести. Скорости деформаций ползучести и переменный параметр поврежденности выражены через уравнения Леэки и Хайхурста [3]. Исходная система уравнений, после применения процедуры метода конечных элементов, преобразована к конечно-разностной системе, где неизвестными являются напряжения и параметр поврежденности. Численное интегрирование этих уравнений, с учетом пространственных переменных, приводит к нелинейной системе обыкновенных разностных уравнений первого порядка. В свою очередь эта система интегрируется с учетом времени методом Эйлера. Получено аналитическое выражение для продолжительности шага времени, обеспечивающего устойчивость численного решения. Предложен специальный способ численного описания поврежденных элементов в процессе ползучести конструкций, дальнейшее сопротивление которых нагрузке исчерпано. Это упрощает алгоритм расчета по сравнению с существующими подходами.

SUMMARY

THE FINITE ELEMENT METHOD IN AN ANALYSIS OF THE CREEP RUPTURE OF STRUCTURES. PART 1. THEORY

Equations of the finite element method are formulated to describe the creep rupture. The structures are subjected to constant load and operate at constant elevated temperature. The total strain rates are assumed to be a sum of the elastic and the creep strain rates. The elastic strain rates are given by Hooke's law. The creep strain rates and the growth of creep damage in metals are expressed by Leckie and Hayhurst's equations. The basic set of equations, after applying the finite element procedure, is reduced to the set of differential-integral equations in which the stresses and damage parameter are unknown quantities. The numerical integration of these equations with respect to spatial coordinates lead to the set of nonlinear first-order differential equations. This set is integrated with respect to time using Euler's method. The analytical expression for the time step ensuring the numerical stability of the solution is determined. A special method is proposed for numerical treatment, in the course of creep, of the damaged elements which are no longer capable of supporting the load. It makes the algorithm of calculation easier than in the hitherto existing approaches.

WYŻSZA SZKOŁA ROLNICZO-PEDAGOGICZNA W SIEDLCACH
WYDZIAŁ CHEMICZNO-MATEMATYCZNY

i
POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 października 1988 r.
