

K O M U N I K A T Y

SYMETRYCZNE ZGINANIE PŁYT KOŁOWYCH Z NIELINIOWO SPRĘŻYSTEGO MATERIAŁU

N. W. L A P I N (KAZAŃ)

W pracy wykorzystano wcześniej zbudowany wariant równań konstytutywnych (kwadratowe przybliżenie) dla cienkich płyt i powłok z nieliniowo sprężystego, „miękkiego” materiału. Rozwiązano zadanie symetrycznego zginania płyty kołowej z zastosowaniem ogólnych związków nieliniowej teorii powłok przy dużych odkształceniach. Układ równań tego zadania z warunkiem utwierdzenia na brzegu rozwiązuje się metodą elementów skończonych. Aby rozwiązać otrzymany układ nieliniowych równań algebraicznych wykorzystuje się stacjonarny proces iteracyjny z macierzą liniowego zadania na górnej warstwie. Na podstawie numerycznego rozwiązania zginania, zbadano zależność naprężenie-odkształcenie dla kołowych płyt. Uzyskane wyniki zauważalnie odbiegają od przewidywanych przez fizycznie liniową teorię. Na podkreślenie zasługuje fakt, że uwzględnienie skończonych odkształceń znacznie zmniejsza promieniowe i obwodowe naprężenia.

Niniejsza praca jest kontynuacją prac autora [3, 4], w których zaproponowano wariant konstytutywnych związków dla nieliniowo sprężystych, „podatnych” materiałów. Tutaj, w ramach nieliniowej teorii, przy założeniu dużych odkształceń, rozwiązano zadanie symetrycznego zginania płyty kołowej wykonanej z nieliniowo sprężystego, „miękkiego” materiału.

Rozpatrzmy odkształcenie powierzchni płyty kołowej poddanej działaniu normalnego, symetrycznego obciążenia. Powierzchnia środkowa płyty opisana jest w biegunowym układzie współrzędnych ϱ , φ . Przez $u_1 = u$, $u_2 = 0$ oznaczamy kowariantne składowe wektora przemieszczenia, przez w ugięcie.

Wtedy związki teorii deformacji, przedstawione np. w książce [1], istotnie upraszczają się po uwzględnieniu symetrii zadania.

Kowariantne składowe tensora skończonych odkształceń przyjmują postać:

$$(1) \quad 2\varepsilon_{11} = 2 \frac{du}{d\varrho} + \left(\frac{du}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{dw}{w\varrho}\right)^2, \quad 2\varepsilon_{12} = 0, \quad 2\varepsilon_{22} = 2\varrho u + u^2,$$

a kowariantne składowe tensora odkształceń giętnych dla rozpatrywanego przypadku są równe:

$$(2) \quad \begin{aligned} \kappa_{11} &= J^{-1/2}(1+u/\varrho) \left[\frac{dw}{d\varrho} \frac{d^2u}{d\varrho^2} - \frac{d^2w}{d\varrho^2} \left(1 + \frac{du}{d\varrho}\right) \right], \\ \kappa_{12} &= 0, \quad \kappa_{22} = -J^{-1/2}(1+u/\varrho)^2 \varrho \frac{dw}{d\varrho}, \end{aligned}$$

gdzie

$$J = (1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{22}/\varrho^2).$$

Aby otrzymać rozwiązanie zadania, wykorzystuje się równania równowagi [1] teorii dużych odkształceń cienkich powłok w dowolnych krzywoliniowych współrzędnych.

$$\nabla_i^* T_*^{ik} - b_{ik}^* N_*^i + X_*^k = 0, \quad i, k = \overline{1, 2},$$

$$\nabla_i^* N_*^i + b_{ik}^* T_*^{ik} + X_*^3 = 0,$$

$$\nabla_i^* M_*^{ik} - N_*^k + M_*^k = 0, \quad i, k = \overline{1, 2},$$

$$T_*^{12} - T_*^{21} + M_*^{k1} b_k^{*2} - M_*^{k2} b_k^{*1} = 0,$$

gdzie X_*^k , M_*^k – kowariantne składowe wektorów zewnętrznej siły i zewnętrznego momentu w odniesieniu do odkształconej powierzchni środkowej S_* ; T_*^{ik} i M_*^{ik} – kontrawariantne składowe tensorów sił stycznych i momentów w odniesieniu do S_* ; N_*^i – siły poprzeczne.

Dla rozpatrywanego przypadku równania (3) przyjmują postać:

$$\frac{dc_1 T_*^{11}}{d\varrho} + c_2 \left[T_*^{11} \frac{d\varepsilon_{11}}{d\varrho} - T_*^{22} \left(\varrho + \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varrho} \right) \right] + \frac{\kappa_{11}}{1 + 2\varepsilon_{11}} \left\{ \frac{dc_1 M_*^{11}}{d\varrho} + \right. \\ \left. + c_2 \left[M_*^{11} \frac{d\varepsilon_{11}}{d\varrho} - M_*^{22} \left(\varrho + \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varrho} \right) \right] \right\} + c_2 \frac{dw}{d\varrho} X^3 = 0,$$

$$\frac{d}{d\varrho} \left\{ \frac{dc_1 M_*^{11}}{d\varrho} + c_2 \left[M_*^{11} \frac{d\varepsilon_{11}}{d\varrho} - M_*^{22} \left(\varrho + \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varrho} \right) \right] \right\} + \\ + c_3 T_*^{11} + c_4 T_*^{22} + (\varrho + u) \left(1 + \frac{du}{d\varrho} \right) X^3 = 0,$$

gdzie

$$c_1 = \varrho J^{1/2}, \quad c_2 = \varrho J^{1/2} (1 + 2\varepsilon_{11})^{-1}, \quad c_3 = -\varrho \kappa_{11} J^{1/2}, \quad c_4 = -\varrho \kappa_{22} J^{1/2}.$$

Zauważmy, że w przypadku zadania liniowego równania (4) przyjmują znaną postać:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{du}{d\varrho} \right) + \frac{u}{\varrho^2} = 0, \quad \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left\{ \varrho \frac{d}{d\varrho} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dw}{d\varrho} \right) \right] \right\} = c \cdot X^3.$$

Jako równanie stanu wzięto związku, zaproponowane uprzednio przez autora, dla nieliniowo sprężystych, „miękkich” materiałów. Wyrażenia na kontrawariantne składowe tensorów sił stycznych i momentów otrzymamy całkując wspomniane związki po grubości powłoki (przy założeniu hipotezy Love’a–Kirchhoffa):

$$(6) \quad T_*^{11} = \frac{1}{1+2\varepsilon_{11}} \cdot L_1(\varepsilon, \kappa), \quad T_*^{22} = \frac{1}{\varrho^2+2\varepsilon_{22}} \cdot L_2(\varepsilon, \kappa),$$

$$M_*^{11} = \frac{1}{1+2\varepsilon_{11}} \cdot L_3(\varepsilon, \kappa), \quad M_*^{22} = \frac{1}{\varrho^2+2\varepsilon_{22}} \cdot L_4(\varepsilon, \kappa),$$

gdzie

$$L_1(\varepsilon, \kappa) = (2-3\beta_1)J_1(1-2\varepsilon_{11})\varepsilon_{11} + (2-3\beta_2)J_2(1-4\varepsilon_{11})\kappa_{11} -$$

$$-2(2-3\beta_3)J_3\kappa_{11}^2 + (1-3\beta_1)J_1(1-2\varepsilon_{11})\varepsilon_{22}/\varrho^2 + (1-3\beta_2)J_2(1-2\varepsilon_{11})\kappa_{22}/\varrho^2 -$$

$$-2(1-3\beta_2)J_2\kappa_{11}\varepsilon_{22}/\varrho^2 - 2(1-3\beta_3)J_3\kappa_{11}\kappa_{22}/\varrho^2,$$

$L_2(\varepsilon, \kappa)$ otrzymuje się z $L_1(\varepsilon, \kappa)$, a $L_4(\varepsilon, \kappa)$ z $L_3(\varepsilon, \kappa)$ zastępując wielkości $\varepsilon_{11} \rightleftharpoons \varepsilon_{22}/\varrho^2$, $\kappa_{11} \rightleftharpoons \kappa_{22}/\varrho^2$; $L_3(\varepsilon, \kappa)$ otrzymuje się drogą zamiany wskaźników $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$ we współczynnikach β_k , J_k ;

$$\beta_k = J'_k/J_k, \quad J_k = \int_{-h/2}^{h/2} pz^{k-1} dz, \quad J'_k = \int_{-h/2}^{h/2} mpz^{k-1} dz,$$

p, m – wielkości zależne od stałych materiałowych, średniego odkształcenia i intensywności odkształceń postaciowych, [4].

Zauważmy, że związki (6) są właściwe w obszarze umiarkowanie dużych odkształceń. Tak więc, równania (4) sprowadzono do układu dwóch nieliniowych równań różniczkowych na przemieszczenie u i ugięcie w .

Podamy przybliżone rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla układu równań (4). Rozpatrzmy przykład zginania kołowej, utwierdzonej na brzegu płyty, poddanej działaniu rozłożonego obciążenia normalnego X^3 ; $u = w = 0$, $w' = 0$ dla $\varrho = R$.

Niżej podajemy sformułowanie zadania. Równania (4) zapiszemy w postaci macierzowej $A\bar{u} = \bar{f}$, gdzie $\bar{u} = (u(\varrho), w(\varrho))$, $0 < \varrho < R$. Mnożymy równanie macierzowe przez próbną funkcję wektorową $\delta\bar{u}$ i całkujemy po ϱ w przedziale $[0, R]$. Stosując zasadę całkowania przez części otrzymujemy tzw. tożsamość całkową: $A(\bar{u}, \delta\bar{u}) = (\bar{f}, \delta\bar{u})$, $\forall \delta\bar{u} \in \bar{V}$. Wprowadzono tu przestrzeń $\bar{V} = V_u \times V_w$, $V_u = \{u: u \in C^1(0, R): u(R) = 0\}$, $V_w = \{w: w \in \tilde{C}^2(0, R): w(R) = w'(R) = 0\}$; $\tilde{C}^k(0, R)$ – przestrzeń funkcji o $k-1$ ciągłych pochodnych o odcinkowo-ciągłej k -tej pochodnej.

Do rozwiązania tożsamości całkowej zastosowano metodę elementów skończonych. Wyjściowa przestrzeń \bar{V} przybliża się skończonej wymiarowej przestrzeni V_h o bazie

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}: V_h \subset V, \quad V_h \in u_h(\varrho) = \sum_{i=1}^{N_h} \bar{\alpha}_i \varphi_i(\varrho).$$

Przybliżonym rozwiązaniem jest funkcja $\bar{u}_h \in \bar{V}_h$, spełniająca tożsamość całkową:

$$(7) \quad A(\bar{u}_h, \delta\bar{u}_h) = (\bar{f}, \delta\bar{u}_h), \quad \forall \delta\bar{u}_h \in \bar{V}_h.$$

Jako elementy skończone wybieramy odcinki równej długości. V_h jest przestrzenią odcinkowo-wielomianowych funkcji. W ten sposób całkowita tożsamość (7) jest równoważna następującemu układowi nieliniowych równań algebraicznych:

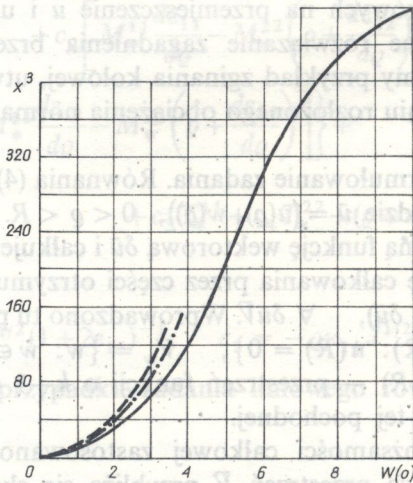
$$A(\bar{u}_h, \varphi_i) = (\bar{f}, \varphi_i), \quad i = \overline{1, N_h}.$$

Aby rozwiązać układ wykorzystano stacjonarny proces iteracyjny z operatorem B liniowego zadania (5) na górnej warstwie:

$$B \frac{\bar{u}_h^{(k+1)} - \bar{u}_h^{(k)}}{\tau} + A\bar{u}_h^{(k)} = \bar{f}.$$

Na podstawie algorytmu zadania wykonano program w języku PL-1 i zrealizowano go na maszynie cyfrowej JS-1033. Wyniki liczbowe otrzymanego rozwiązania przedstawiono graficznie.

Na rys. 1 przedstawiona jest zależność pomiędzy bezwymiarowymi parametrami, ugięciem środka płyty i wielkością obciążenia. Ciągła linia odpowiada wynikom otrzymanym w pracy; przerywana linia — wynikiem otrzymanym bez uwzględnienia wpływu fizycznej nieliniowości; przerywano-punktowa linia — wynikiem [2], gdzie to samo zadanie rozwiązano jako geometrycznie nieliniowe i liniowe fizycznie.



Rys. 1

Na podstawie przedstawionej graficznie zależności ugięcia środka płyty od wielkości obciążenia można zauważyć, że krzywa odbiega szybko od przewidywanej przez teorię fizycznie liniową. Po osiągnięciu obciążenia odpowiadającego ugięciu rzędu grubości płyty krzywa wznosi się prawie liniowo aż do obciążenia odpowiadającego ugięciu rzędu siedmiu grubości płyty, po czym

nachylenie maleje. Przy zmianie obciążenia do wielkości odpowiadającej ugięciu rzędu czterech grubości płyty odkształcenia są wciąż jeszcze małe, ale obroty stają się zauważalne. Następnie, wraz ze wzrostem obciążenia obroty wzrastają, a odkształcenia stają się umiarkowanie dużymi. W świetle powyższych uwag wydaje się usprawiedliwione rozwiązywanie zginania kołowej płyty utwierdzonej w ramach nieliniowej teorii powłok przy dużych odkształceniach.

Należy również zaznaczyć, że w tym zadaniu uwzględnienie skończonych odkształceń znacznie zmniejsza promieniowe i obwodowe naprężenia.

Objętość pracy w zasadzie nie powinna przekraczać jednego arkusza wydawniczego, czyli około 30 stron maszynopisu formatu papieru proszkowego na interlinii. Praca należy składać w 2 egzemplarzach. Układ pracy powinien być dostosowany do norm przyjętych przez redakcję. W szczególności redakcja uprzedza, że:

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. К. З. ГАЛИМОВ, *Основы нелинейной теории тонких оболочек*, Казань, Изд-во Казан. ун-та, 325, 1975.
2. М. С. КОРНИШИН, Ф. С. ИСАНАБЕВА, *Гибкие пластины и панели*, Москва, „Наука”, 260, 1986.
3. Н. В. ЛАПИН, *Определяющие уравнения нелинейной теории упругости*, В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 14, Казань, Изд-во Казан. ун-та, 205–207, 1979.
4. N. W. LAPIN, *Równania sprężystości teorii odkształceń skończonych dla płyt i powłok*, Rozpr. Inżyn., 28, 4, 661–664, 1980.

5. Wszystkie symbole powinny być wpisane bardzo starannie; szczególną uwagę należy zwrócić na wielkość liter. Litery o spójnicach kropkach należy obkładać na marginesie kropką. Wskazywanie na literę w tekście autor powołuje się w dalszym ciągu pracy i w tym celu nie należy używać skrótów. Litery o spójnicach kropkach należy obkładać na marginesie kropką.

6. Wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ itp. Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1987 r. Funkcje trygonometryczne oznaczają się przez $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$; funkcje odwrotne: $\operatorname{arcsin}, \operatorname{arccos}, \operatorname{arctg}, \operatorname{arccotg}$; funkcje wykładnicze: \exp, \ln ; funkcje logarytmiczne: \lg, \lg_2, \lg_3 ; funkcje hiperboliczne: $\operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \operatorname{th}, \operatorname{cth}$; funkcje odwrotne: $\operatorname{Arsh}, \operatorname{Arch}, \operatorname{Arth}, \operatorname{Arcth}$.

7. Pozycje cytowanej literatury oznacza się liczbami w kłammerach. Pozycje wstępu literatury powinny zawierać pierwsze litery imienia i nazwisko autora (lub autorów) oraz pełny tytuł pracy (w języku oryginalnym) a ponadto:

a) w przypadku książek: miejsce i rok wydania np.: S. W. Nowacki, *Zagadnienia termodynamiki*, PWN, Warszawa 1960;

b) w przypadku czasopisma: pełną nazwę czasopisma, numer kolejny tomu, numer bieżący, strony od... do..., rok wydania. Numer rocznika dla wyższego odróżnienia od numeru bieżącego powinien być podkreślony czarnym ołówkiem np.: 3. Cz. Emsler, *Podstawy teorii bezpieczeństwa konstrukcji*, Rozprawy Inżynierskie, 11, 1, 53–134, 1963.

8. Do pracy należy dołączyć streszczenie o objętości około 5% objętości maszynopisu.

9. Do pracy należy dołączyć słowniczek specjalnych terminów w językach, na które ma być przełożona praca lub w którym mają być wydrukowane streszczenia.

Po otrzymaniu pracy redakcja kieruje ją do recenzentów. Ich opinia jest podstawą do decyzji o przyjęciu pracy do druku.

Autorzy otrzymują po wydrukowaniu pracy bezpłatnie 20 egz. nadbitek. Autorzy, którzy pragną otrzymać większą liczbę nadbitek, powinni o tym zawiadomić redakcję nie później niż po otrzymaniu korekty szpaltowej.